

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**CONTROLE DE VIBRAÇÕES NÃO LINEARES EXCITADAS POR FONTES
NÃO IDEAIS DE ENERGIA**

Leandro Marino Takazono Orbolato
Marcia Midori Okabayashi

São Paulo
2007

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**CONTROLE DE VIBRAÇÕES NÃO LINEARES EXCITADAS POR FONTES
NÃO IDEAIS DE ENERGIA**

Trabalho de conclusão de curso a ser apresentado à
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para
obtenção do título de Graduação em Engenharia

Leando Marino Takazono Orbolato
Marcia Midori Okabayashi

Orientador:
Prof. Dr. Reyolando Manoel Lopes
Rebello da Fonseca Brasil

Área de concentração:
Engenharia Mecânica

São Paulo
2007

FICHA CATALOGRÁFICA

Orbolato, Leandro Marino Takazono

Controle de vibrações não lineares excitadas por fontes não
ideais de energia / L.M.T. Orbolato, M.M. Okabayashi. -- São Paulo, 2007.
p.88

Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade
de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1.Controle passivo I.Okabayashi, Márcia Midori II.Universidade de São
Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica III.t.

AGRADECIMENTOS

Leandro:

Agradeço imensamente aos meus pais pelo suporte incondicional dado em todos os momentos, pelo amor e carinho e pelo seu exemplo de vida a ser seguido.

A minha irmã por ser o meu modelo de sucesso e dedicação.

A minha namorada pelo suporte nesses anos difíceis e nos que estão por vir.

Ao professor Reyolando pela paciência e dedicação no ensino.

Aos professores e amigos, que me auxiliaram por todos esses anos.

Marcia:

Aos meus pais, que por toda a graduação foram o meu porto de apoio, de amor e de conforto. Por tudo.

Aos meus irmãos, meus exemplos incondicionais de sucesso profissional e ética, que proporcionaram à minha educação tanto quanto meus pais e foram determinantes no desenvolvimento de meus valores. Ainda o são.

Aos amigos politécnicos, por todos os momentos. Por todo o apoio.

Às minhas grandes amigas, por sempre me trazerem de volta a lucidez e pelos seus aconselhamentos nos últimos 10 anos...

Ao professor Reyolando pelo conhecimento que nos proporcionou e pela paciência e incentivo que deu por todo o longo caminho.

Aos meus professores de graduação.

RESUMO

Neste trabalho realizamos um estudo de controle de vibrações não lineares de dois sistemas dinâmicos não ideais. São propostas duas formas de controle de vibrações através de massas absorvedoras de energia. Um caso em estudo é constituído por um pêndulo acoplado a um bloco que oscila horizontalmente. O segundo, por um segundo bloco (TMD – *tuned mass damper*), acoplado ao sistema principal. A oscilação se deve a rotação de uma massa desbalanceada, acionada por um motor DC, cuja fonte de energia é limitada.

Considera-se a existência de interação entre o fornecimento de energia e o movimento da estrutura suporte. Se a potência fornecida pela fonte de energia não é suficiente, a rotação do motor pode ficar estagnada na frequência de ressonância da estrutura, impossibilitando um aumento na rotação do motor. A existência desse efeito foi relatada por Sommerfeld (1904).

ABSTRACT

In this paper a study on non linear vibrations, caused by non ideal dynamic systems is done. Two forms of energy absorbers are used. One of the cases is a pendulum which is attached to the main body, which oscillates horizontally. The other case is another absorber body (TMD – tuned mass damper), which is attached to the main body and oscillates along with it. The oscillation is caused by using an unbalanced engine, a limited power supply.

It is also considered the existence of an interaction between the power supply and the movement of the structure. If the power supplied by the source of energy is not sufficient, the engine can get stuck in the resonance frequency of the structure, disabling higher engine velocity. The existence of this effect was first brought by Sommerfeld (1904).

ÍNDICE

1.	INTRODUÇÃO	1
2.	INTRODUÇÃO TEÓRICA	2
	2.1 CONTROLE DE VIBRAÇÕES.....	2
	2.2 SISTEMAS DINÂMICOS NÃO IDEAIS	4
	2.3 ANÁLISE DE ESTABILIDADE EM SISTEMAS DINÂMICOS	7
3.	MODELAGEM MATEMÁTICA.....	10
	3.1 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO.....	10
	3.1.1 Sistema sem controle	11
	3.1.2 Sistema controlado por pêndulo	15
	3.1.3 Sistema controlado por TMD.....	19
4.	PONTOS DE EQUILÍBRIO DO SISTEMA	23
	4.1 LINEARIZAÇÃO EM TORNO DE UM PONTO DE EQUILÍBRIO.....	24
	4.2 ANÁLISE DO PONTO DE EQUILÍBRIO	24
	4.2.1 Sistema sem Controle	25
	4.2.2 Modelo controlado por pêndulo.....	33
	4.2.3 Modelo controlado por TMD.....	41
5.	ESTUDOS PARAMÉTRICOS	53
	5.2 MODELO CONTROLADO POR PÊNDULO.....	56
	5.2.1 Influência do comprimento do pêndulo.....	57
	5.2.2 Influência do amortecimento do pêndulo	58
	5.2.3 Influência da massa do pêndulo.....	59
	5.2.4 Resultado dos estudos paramétricos	59
	5.3 MODELO COM TMD	64
	5.3.1 Influência do valor da massa secundária.....	64
	5.3.2 Influência da rigidez da massa secundária	65
	5.3.3 Influência do amortecimento da massa secundária.....	66
	5.3.4 Resultado dos estudos paramétricos	66
	5.4 Comentários sobre os estudos paramétricos	73
6.	CONCLUSÃO	74
7.	ESTUDOS POSTERIORES.....	75
8.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	76

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: Energia fornecida ao sistema pela rotação do motor.	5
Figura 2: Curvas características sobre a curva de energia.	5
Figura 3: Características de limite.	6
Figura 4: Classificação de estabilidade em sistemas dinâmicos	7
Figura 5: Seção de Poincaré.	9
Figura 6: Modelo sem controle.....	11
Figura 7: Modelagem física do sistema controlado por pêndulo.	15
Figura 8: Modelagem do sistema físico controlado por TMD	19

,

ÍNDICE DE GRÁFICOS

Gráfico 1: Posição do bloco em modelo sem controle ($a=0,115$).	26
Gráfico 2: : Velocidade do motor em modelo sem controle ($a=0,115$).	26
Gráfico 3: : Velocidade do bloco pela sua posição em modelo sem controle ($a=0,115$).	27
Gráfico 4: Posição do bloco em modelo sem controle ($a=0,36$).	28
Gráfico 5: Velocidade do motor em modelo sem controle ($a=0,36$).	28
Gráfico 6: Velocidade do bloco em modelo sem controle ($a=0,36$).	29
Gráfico 7: Posição do bloco em modelo sem controle ($a=0,7$).	30
Gráfico 8: Velocidade do motor em modelo sem controle ($a=0,7$).	30
Gráfico 9: Velocidade do bloco pela sua posição em modelo sem controle ($a=0,7$).	30
Gráfico 10: Posição do bloco em modelo sem controle ($a=20$).	31
Gráfico 11: Velocidade do motor em modelo sem controle ($a=20$).	32
Gráfico 12: Velocidade do bloco pela sua posição em modelo sem controle ($a=20$).	32
Gráfico 13: Posição do bloco em modelo controlado por pêndulo ($a=0,11$).	34
Gráfico 14: Velocidade do motor em sistema controlado por pêndulo ($a=0,11$).	34
Gráfico 15: Velocidade do bloco por sua posição em sistema controlado por pêndulo ($a=0,11$).	35
Gráfico 16: Posição do bloco em modelo controlado por pêndulo ($a=0,36$).	36
Gráfico 17: Velocidade do motor em modelo controlado por pêndulo ($a=0,36$).	36
Gráfico 18: Velocidade pela posição do bloco em modelo controlado por pêndulo ($a=0,36$).	37
Gráfico 19: Posição do bloco em modelo controlado por pêndulo ($a=0,7$).	38
Gráfico 20: Velocidade do motor em modelo controlado por pêndulo ($a=0,7$).	39
Gráfico 21: Velocidade pela posição do bloco em modelo controlado por pêndulo ($a=0,7$).	39
Gráfico 22: Posição do bloco em modelo controlado por pêndulo ($a=5$) – zoom.	40
Gráfico 23: Velocidade do motor em modelo controlado por pêndulo ($a=5$).	40
Gráfico 24: Velocidade pela posição do bloco em modelo controlado por pêndulo ($a=5$).	41
Gráfico 25: Posição do bloco em modelo controladfo por TMD ($a=0,1$).	42

Gráfico 26:: velocidade do motor em sistema controlado por TMD ($a=0,1$).....	43
Gráfico 27: Velocidade pela posição do bloco em sistema controlado por TMD ($a=0,1$).	43
Gráfico 28: Posição do bloco em sistema controlado por TMD ($a=0,3$).	44
Gráfico 29: Velocidade de rotação do motor em sistema controlado por TMD ($a=0,3$).	45
Gráfico 30: Posição do bloco por sua velocidade em modelo controlado por TMD ($a=0,3$).	45
Gráfico 31: Posição do bloco em sistema controlado por TMD ($a=0,7$).	46
Gráfico 32: Velocidade de rotação do motor em modelo controlado por TMD ($a=0,7$).	46
Gráfico 33: Velocidade do bloco pela posição em modelo controlado por TMD ($a=0,7$).	47
Gráfico 34: Posição do bloco em sistema controlado por TMD ($a=5$).	48
Gráfico 35: velocidade de rotação do motor em sistema controlado por TMD ($a=5$).	48
Gráfico 36: velocidade do bloco por sua posição em sistema controlado por TMD ($a=5$).	49
Gráfico 37: Comparação da curva de energia para diferentes valores de raio.....	53
Gráfico 38: Energia em função da variação do amortecimento z	54
Gráfico 39: Posição do bloco em função do tempo.....	55
Gráfico 40: Velocidade da massa principal em função do tempo.....	55
Gráfico 41: Velocidade do motor em função do tempo.....	56
Gráfico 42: Estudo paramétrico do comprimento do pêndulo.	57
Gráfico 43: Estudo paramétrico do amortecimento do pêndulo.....	58
Gráfico 44: Estudo paramétrico da massa do pêndulo.	59
Gráfico 45: Comparação da posição do bloco com controle pêndulo.	60
Gráfico 46: Comparação da velocidade de motor com controle pêndulo.....	61
Gráfico 47: Comparação dos planos de fases com controle pêndulo.	62
Gráfico 48: Comparação da curva de energia com controle pêndulo.....	63
Gráfico 49: Estudo paramétrico da massa de controle.....	64
Gráfico 50: Variação da rigidez da massa secundária.....	65

Gráfico 51: Curva de energia em relação a diferentes valores de amortecimento	66
Gráfico 52: Comparação do deslocamento da massa principal em função do tempo	67
Gráfico 53: Comparação da velocidade da massa principal em função do tempo	68
Gráfico 54: Comparação da velocidade do motor em função do tempo	69
Gráfico 55: Comparação entre os planos de fases	70
Gráfico 56: Deslocamento da massa secundária em função do tempo	71
Gráfico 57: Velocidade da massa secundária em função do tempo	72
Gráfico 58: Comparação da curva de energia para os diferentes sistemas	73

1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho, registra-se os estudos realizados sobre controle de vibrações não lineares de dois sistemas dinâmicos não ideais assim como o sobre o comportamento deste sistema sem o controle.

Sistemas como os estudados neste trabalho são amplamente utilizados em pontes, torres, prédios e fundações de máquinas, para modificar a frequência natural desses elementos, e com isso evitar uma queda ou abalo de estruturas causados por ressonância entre a construção e o meio. Além disso, como o objeto de enfoque deste trabalho, são utilizados para prevenir ou corrigir problemas relacionados à estagnação do motor.

O conteúdo deste trabalho é composto de uma breve introdução teórica para controle de vibrações e análise de estabilidade, além do desenvolvimento matemático das equações de movimento dos sistemas em escopo. Apresentam-se as características de movimento em regime permanente, seguido pela análise de estabilidade deste movimento. Finaliza-se o trabalho com um estudo paramétrico dos sistemas propostos controlados pelas massas amortecedoras, buscando-se a otimização de tais sistemas de controle.

2. INTRODUÇÃO TEÓRICA

2.1 *Controle de Vibrações*

As vibrações são objetos importantes de estudo, uma vez que seu efeito pode ser bastante danoso. Neste capítulo pretende-se descrever sucintamente os métodos de controle de vibrações conhecidos, especificando aqueles que serão utilizados ao decorrer deste projeto.

É importante notar que movimentos oscilatórios são praticamente inevitáveis dentre as máquinas e estruturas conhecidas que, ainda que dotadas de dispositivos que busquem a diminuir possíveis vibrações, estão invariavelmente sujeitas a efeitos de vibração, sendo, dessa forma, de extrema importância o estudo de comportamentos vibratórios durante seus projetos.

Ainda que por vezes inevitáveis, a diminuição do comportamento vibratório é quase sempre desejável. Visando ao menos atingir níveis toleráveis de vibração, pode-se aplicar técnicas ativas e passivas de controle de vibração.

Controles de vibração ativos, como o próprio nome diz, são dispositivos que atuam ativamente no controle de vibrações da estrutura. Trata-se de equipamentos dotados de sistemas eletrônicos e atuadores, que promovem a diminuição das perturbações reconhecendo as condições de operação e interferindo sobre o sistema de forma a diminuir movimentos oscilatórios. Uma vez que são de instalação e manutenção mais elaborada, controles de vibração ativos são mais caros que controles de vibração passivos, sendo, entretanto, mais indicados para situações de vibrações críticas.

Já os controles de vibração passivos modificam o sistema oscilatório em sua forma estrutural ou através da introdução de elementos ao sistema. É bastante difundido o controle de vibrações dado por uma massa acoplada à estrutura oscilante, Tuned Mass Damper (TMD), como em Kuroiwa (2003), que aqui será apresentado juntamente com o controle de vibração através de um pêndulo acoplado à massa oscilante, como feito por Ferreira (2007). Ambas as técnicas de controle são utilizadas em larga escala em estruturas como pontes, prédios, torres e fundação de

máquinas. Outros estudos focados em estruturas do tipo pórtico, excitadas por fontes não-ideais de energia, foram estudados por Feitosa (2006) e Guilherme (2004). Elas não só proporcionam a diminuição das características oscilatórias do sistema como também reduzem o risco de o sistema recair sob o efeito Sommerfeld, que é comentado a seguir.

O controle passivo de vibrações é uma técnica ainda em desenvolvimento de estudos e sua utilização é presente desde na proteção de grandes estruturas em áreas em perigo de ocorrências sísmicas até em necessidades de controle de vibrações sonoras, sendo, por diversas vezes, empregada conjunta a formas ativas de controles de vibração.

2.2 Sistemas Dinâmicos Não Ideais

Sistemas dinâmicos não ideais são aqueles alimentados por fontes não ideais de energia, que, por sua vez, são fontes de energia que atuam sobre o sistema oscilatório sofrendo influência desse sistema. Assim, sistemas modelados como não-ideais possuem pelo menos um grau de liberdade a mais que aqueles modelados como sendo ideais.

Sommerfeld (1904) foi o primeiro pesquisador a notar que a velocidade de um motor é função, não só do tempo, mas da amplitude de oscilação também.

Kononenko (1969), um dos mais importantes pesquisadores dos fenômenos de vibração, reportou em um experimento os movimentos instáveis apresentados pelo seu sistema viga-motor quando operando na região de ressonância. Tais instabilidades são caracterizadas por variações bruscas da frequência de deslocamento e frequência de excitação, descontinuidades nas curvas de amplitude, diferenças na aparência da curva de amplitude, dependendo da variação de frequência (desaceleração ou aceleração), e histerese.

Essas instabilidades são de importância para este trabalho uma vez que modificam a relação entre a potência e a velocidade do motor. Quando o motor atinge rotações que deixam o sistema próximo à ressonância, nota-se que a fonte tem de fornecer mais energia para proporcionar o mesmo aumento de velocidade ao motor. Isso ocorre uma vez que parte da energia é desperdiçada no movimento da estrutura do suporte. Nessa região, grandes aumentos de potência pouco efeito têm sobre o motor e esses aumentos só vem a causar maiores amplitudes de oscilação.

A Figura 1 ilustra a energia fornecida ao motor em função da rotação do motor.

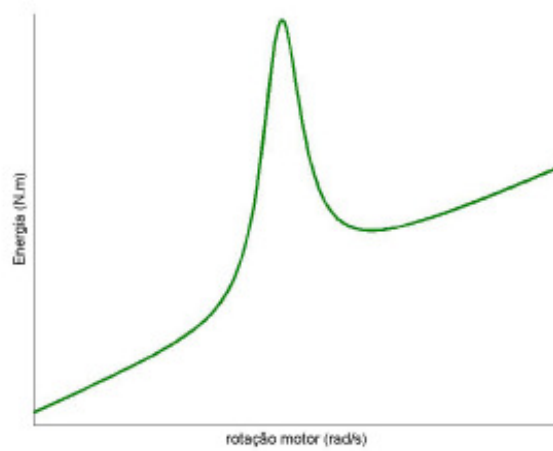


Figura 1: Energia fornecida ao sistema pela rotação do motor.

Quando essa curva apresentada intercepta as curvas características do fornecimento de energia por motores (na Figura 2, as curvas diagonais), temos o surgimento de regime estacionário.

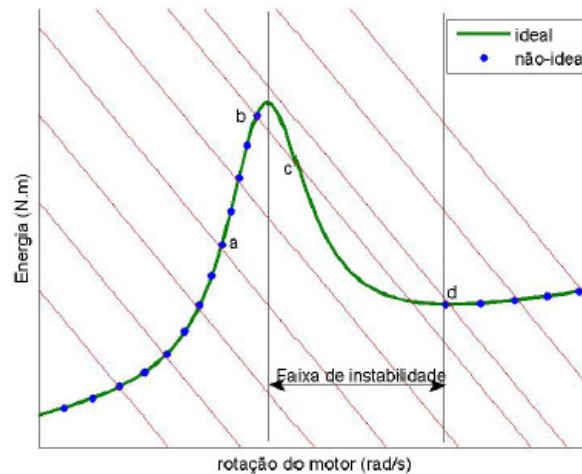


Figura 2: Curvas características sobre a curva de energia.

A partir da Figura 3, pode-se ainda tentar explicar o fenômeno dos saltos, em que o motor pula de um ponto de operação estável para outro, deslocando-se ao longo das curvas características do motor, causando descontinuidade.

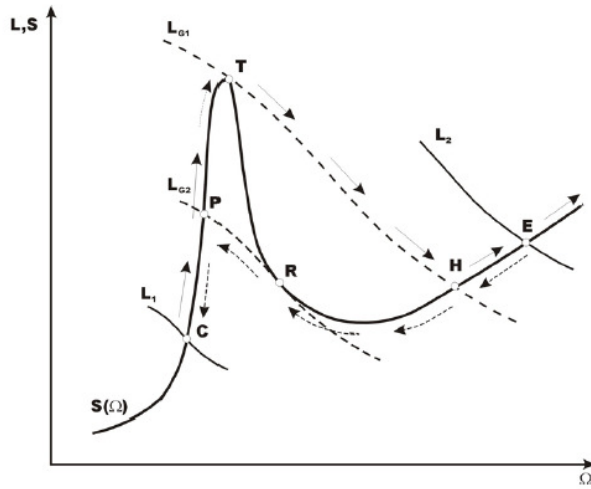


Figura 3: Características de limite.

Para entender este fenômeno deve-se considerar as Figuras 2 e 3. Nota-se que, na região delimitada como faixa de instabilidade da Figura 2, ocorre o deslocamento do ponto de operação na Figura 3. O ponto T, por exemplo, no limiar da região de estabilidade, tende a deslocar a operação para o ponto H, estável e pertencente à mesma curva característica do motor. Este salto apresenta efeito crescente na rotação de operação. Por outro lado, o ponto R, também localizado na zona de instabilidade, tende a deslocar-se para o ponto P, o único ponto estável que cruza com a mesma curva característica do motor. Segundo Kononenko (1969), este salto ocorre em rotações decrescentes.

Neste estudo, será utilizada a modelagem de um motor CC. As curvas características do motor serão aproximadas a retas, como na Figura 2, que atendem à equação de torque:

$$M=a-b(d\phi/dt). \quad (1)$$

Os efeitos dos saltos relatados são averiguados nas simulações numéricas e fica evidente que o sistema não fornece soluções na faixa de instabilidade havendo o escorregamento dos pontos de funcionamento estáveis. Em outras palavras nota-se uma grande diminuição na amplitude de movimento da estrutura, ainda que com

pouca variação do parâmetro “a”, da equação 1, que representa parte da equação do torque como será aqui utilizado.

2.3 Análise de estabilidade em sistemas dinâmicos

Neste ponto, introduz-se a análise de estabilidade em sistemas dinâmicos. Define-se sistemas dinâmicos como estáveis, aqueles que, dada uma perturbação qualquer, permanecem próximos ao ponto inicial uma vez cessada a perturbação (Ferreira, 2007, p.10). Essa trajetória de reaproximação ao ponto inicial pode ser dada de diversas formas, que classificam a estabilidade do sistema em ainda outras formas.

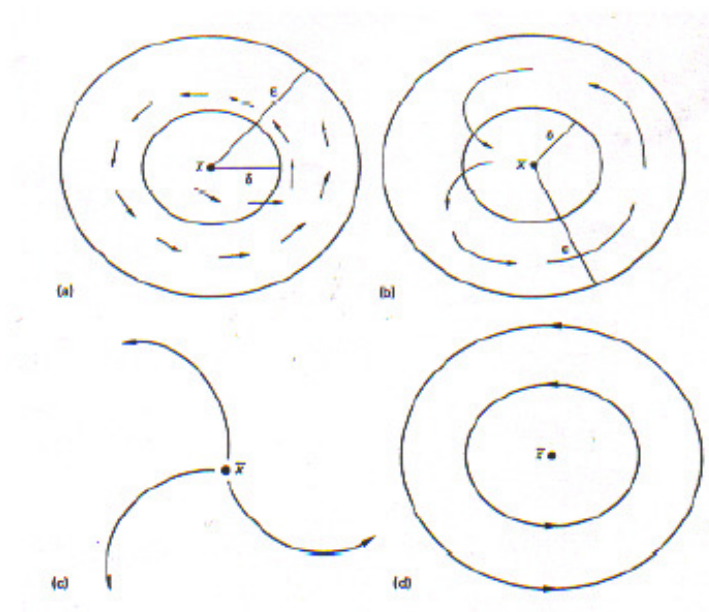


Figura 4: Classificação de estabilidade em sistemas dinâmicos

Segundo a definição acima proposta, temos que, na figura 4, dado um ponto $\bar{x}$ inicial que sofre uma perturbação, a situação 4a é dita estável, 4b, assintoticamente estável, 4c, instável e 4d, estável (não assintoticamente).

Sistemas assintoticamente estáveis convergem para o ponto inicial de maneira assintótica, permanecendo, durante sua trajetória, perto do ponto inicial.

Fica evidente que sistemas dinâmicos estáveis apresentam um ponto $\bar{x}$ com características atratoras enquanto sistemas instáveis são caracterizados por pontos de repulsão.

Considerando agora um sistema dinâmico qualquer definido por:

$$\{\dot{y}\} = [A]\{y\} \quad (2)$$

Na qual A é definida pela matriz lagrangeana. O sistema 2 possui N autovalores na forma $\lambda_j = R_j + I_j i$ ($j=1,2,\dots,N$) que podem ser descritos da forma $e^{\lambda_j t} = e^{R_j t} + e^{I_j t}$, dependente do tempo. Assim, é evidente que pontos sorvedouros apresentam R, a parte real dos autovalores, negativos, denotando um movimento que se aproxima do ponto $\bar{x}$, ao longo do tempo. Retornando ao sistema genérico, $\dot{x} = f(x)$, os pontos de equilíbrio são encontrados quando $f(x)=0$. Dessa condição as velocidades e acelerações em um ponto de equilíbrio são nulas e, a partir dessas condições, é possível obter vários pontos de equilíbrio de um sistema.

É importante lembrar que diversas outras maneiras de evidenciamento da estabilidade dos sistemas podem ser encontradas na literatura, como os expoentes de Lyapunov e a seção de Poincaré - estudo que foi efetuado por Júnior, 2007. Dessas, os mapas de Poincaré também serão apresentados aqui.

Segundo Thompson e Stewart (1986), a análise de estabilidade proposta por Poincaré consiste na coleta de dados de um sistema em intervalos regulares de tempo. Isso demonstra a periodicidade do movimento em estudo.

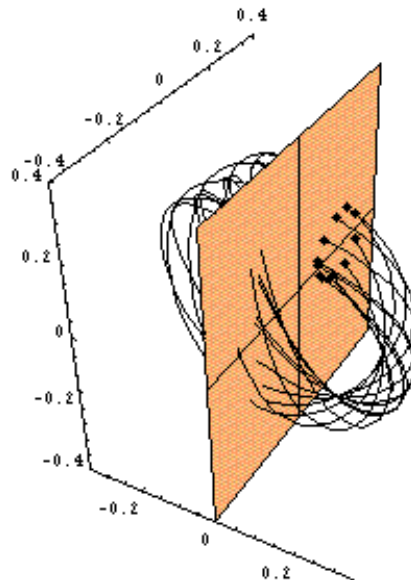


Figura 5: Seção de Poincaré.

A figura 5 procura ilustrar uma seção de Poincaré. Ela apresenta pontos de velocidade e posição ao longo do tempo sendo seccionados. Nota-se que na Figura 5, dado o mesmo intervalo de tempo, os pontos mostram-se concentrados em uma região limitada do plano.

Em sistemas com características periódicas, os mapas obtidos pela seção de Poincaré povoam um espaço limitado do plano. Por outro lado, em movimentos caóticos, o mapa da seção de Poincaré apresenta pontos espalhados pelo plano, o que evidencia um movimento sem periodicidade, ou seja, dada uma certa perturbação, o sistema não retorna necessariamente ao seu ponto de partida, indo de encontro à definição de estabilidade proposta.

3. MODELAGEM MATEMÁTICA

3.1 Equações de movimento

As equações diferenciais de movimento de um sistema dinâmico governam o comportamento do mesmo. Como os sistemas estudados neste trabalho possuem três graus de liberdade, temos três equações diferenciais de segunda ordem. Para encontrá-las, usaremos as equações de Euler-Lagrange do cálculo variacional, com base no que foi estudado em Ogata (1987, 1998):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = N_i \quad (3)$$

$$\text{onde } \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \quad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i} \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = N_i; \quad i=1,2,3... \quad (6)$$

T:energia cinética, V:energia potencial total, N:forças não conservativas

Este capítulo apresentará os sistemas dinâmicos não ideais estudados. Eles são constituídos por um bloco oscilante perturbado por um motor DC de energia limitada. No primeiro caso, o sistema opera sem nenhuma forma de controle como mostra a Figura 6. No segundo caso, um pêndulo é acoplado ao bloco, como mostra a Figura 7. Finalmente, no terceiro caso, um segundo bloco amortecedor é acoplado ao sistema, como mostra a Figura 8.

3.1.1 Sistema sem controle

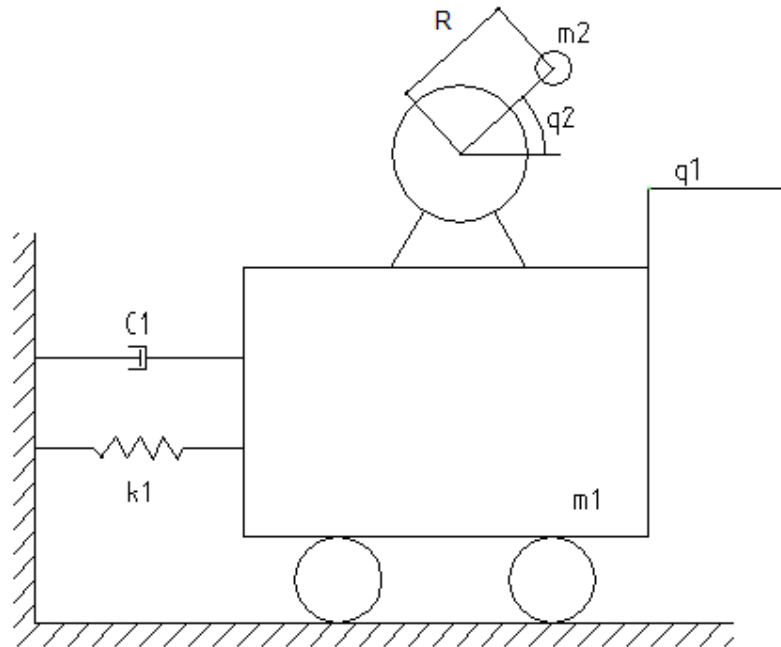


Figura 6: Modelo sem controle.

Temos, neste caso, o bloco de massa m_1 , acoplado a uma mola de constante elástica k_1 , e a um amortecedor de constante c_1 , semelhante ao modelo apresentado por Clough e Penzien (1975). Sobre esse bloco está apoiado um motor DC de energia limitada desbalanceado por massa m_2 a uma distância R do centro do rotor. A Tab. (1) descreve esses parâmetros físicos.

m_1	Massa do bloco oscilante
k_1	Coefficiente de elasticidade da mola acoplada ao bloco oscilante
c_1	Coefficiente de amortecimento do amortecedor acoplado ao bloco oscilante
R	Excentricidade de desbalanceamento
m_2	Massa do motor desbalanceador
q_1	Deslocamento horizontal do bloco oscilante
q_2	Deslocamento angular do motor
g	Aceleração da gravidade

Tabela 1: Parâmetros físicos do modelo sem controle

A partir das definições dadas pelas equações 1, 2 e 3, obtem-se as equações do movimento:

$$\text{A energia cinética é: } T = \frac{1}{2} [m_1 \dot{x}_1 + m_2 (\dot{x}_2 + \dot{y}_2) + m_3 (\dot{x}_3 + \dot{y}_3)]$$

$$\text{Portanto: } T = \frac{1}{2} [(m_1 + m_2) \dot{q}_1^2 + (J + m_2 R^2) \dot{q}_2^2 - 2 m_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 R \sin q_2]$$

A equação de energia de deformação U:

$$U = \frac{1}{2} [k_1 q_1^2]$$

A equação de energia potencial gravitacional W:

$$W = -m_2 g \cdot R \cdot \sin q_2$$

Assim, a energia potencial total é igual a:

$$V = \frac{1}{2} [k_1 q_1^2] + m_2 g \cdot R \cdot \sin q_2$$

Calculando para cada termo i, temos que:

- para $i=1$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = [\dot{q}_1(m_1 + m_2) - m_2 R \dot{q}_2 \sin q_2]$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) = [\ddot{q}_1(m_1 + m_2) - m_2 R(\ddot{q}_2 \sin q_2 + \dot{q}_2^2 \cos q_2)]$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = k_1 q_1$$

$$N_1 = -c_1 \dot{q}_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = 0$$

• para $i=2$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = (J + m_2 R^2) \dot{q}_2 - m_2 R \dot{q}_1 \sin q_2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) = (J + m_2 R^2) \ddot{q}_2 - m_2 R \ddot{q}_1 \sin q_2 + m_2 R \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos q_2$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_2} = m_2 g r \cos q_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_2} = m_2 R \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos q_2$$

$$N_2 = M(\dot{q}_2) = a - b \dot{q}_2$$

Assim:

• para $i=1$

$$\ddot{q}_1(m_1 + m_2) - m_2 R \ddot{q}_2 \sin q_2 = -c_1 \dot{q}_1 - m_2 R \dot{q}_2^2 \cos q_2 - k_1 q_1 = G_1$$

• para $i=2$

$$(J + m_2 R^2) \ddot{q}_2 - m_2 R \ddot{q}_1 \sin q_2 = -m_2 g R \cos q_2 + M(\dot{q}_2) = G_2$$

As equações diferenciais serão definidas através do método de Kramer, assim:

$$A = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & -m_2 R \sin q_2 \\ -m_2 R \sin q_2 & J + m_2 R^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}$$

$$E, \Delta = (m_1 + m_2)(J + m_2 R^2) - (m_2 R \sin q_2)^2$$

Onde Δ é a determinante da matriz A.

Assim, as equações de movimento ficam:

$$\ddot{q}_1 = \frac{G_1(J + m_2 R^2) + G_2 m_2 R \sin q_2}{\Delta} \quad (7)$$

$$\ddot{q}_2 = \frac{G_2(m_1 + m_2) + G_1 m_2 R \sin q_2}{\Delta} \quad (8)$$

3.1.2 Sistema controlado por pêndulo

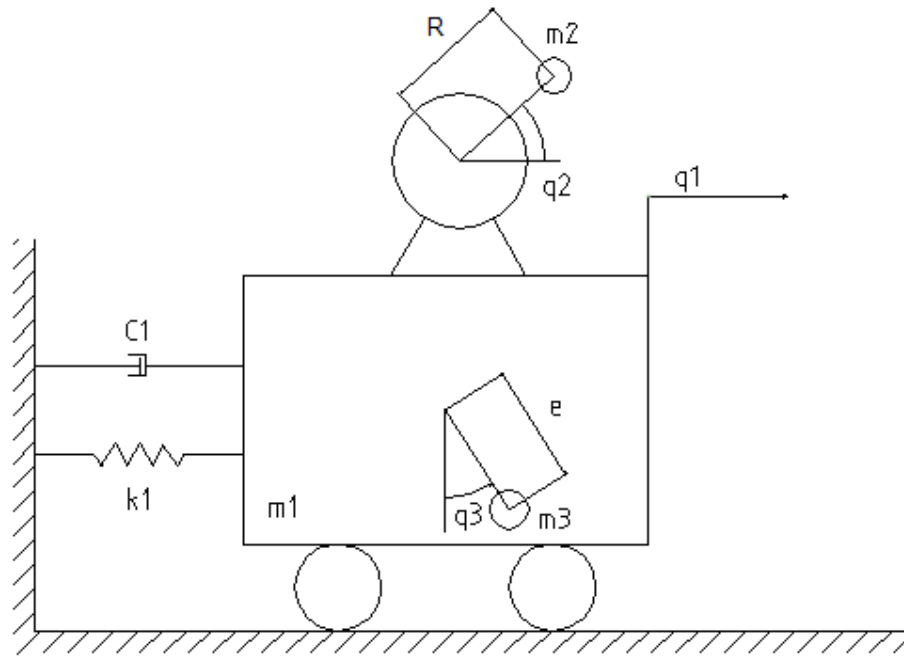


Figura 7: Modelagem física do sistema controlado por pêndulo.

Temos ainda, no segundo caso de controle passivo, que o bloco de massa m_1 está ligado a um pêndulo de massa m_3 e comprimento l .

Segue, na tabela 3, a descrição dos parâmetros adicionados ao sistema sem controle para o segundo caso de amortecimento.

Modelos semelhantes aos apresentados neste artigo foram analisados em Rao, [13], Vierck, [16], Peruzzi (2007), Thomson [14], Júnior (2007) e os modelos por eles apresentados foram utilizados como referência.

M_3	Massa do pêndulo
e	Comprimento do pêndulo
q_3	Deslocamento angular do pêndulo
c_3	Coefficiente de amortecimento do pêndulo

Tabela 2: Descrição dos parâmetros no caso controlado pelo pêndulo.

A partir dos parâmetros acima tabelados, é possível definir as equações do movimento.

Novamente, analogamente ao que já fora exposto, temos que:

A equação de energia cinética T:

$$T = \frac{1}{2} [(m_1 + m_2) \dot{q}_1^2 + (J + m_2 R^2) \dot{q}_2^2 - 2 m_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 R \sin q_2 + m_3 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_3^2 e^2 + 2 e \dot{q}_1 \dot{q}_3 \cos q_3)]$$

A equação de energia potencial total é igual a:

$$V = \frac{1}{2} k \dot{q}_1^2 + m_2 \cdot g \cdot R \sin q_2 + m_3 \cdot g e (1 - \cos q_3)$$

• para $i=1$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = [\dot{q}_1 (m_1 + m_2) - m_2 R \dot{q}_2 \cos q_2 + m_3 \dot{q}_1 + m_3 \dot{q}_3 l \cos q_3]$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) = [\ddot{q}_1 (m_1 + m_2 + m_3) - m_2 R (\ddot{q}_2 \cos q_2 - \dot{q}_2^2 \sin q_2) + m_3 (\ddot{q}_3 l \cos q_3 - \dot{q}_3^2 l \sin q_3)]$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = k_1 q_1$$

$$N_1 = -c_1 \dot{q}_1$$

$$\ddot{q}_1 (m_1 + m_2 + m_3) - m_2 R \ddot{q}_2 \cos q_2 + m_3 \ddot{q}_3 l \cos q_3 = m_2 R \dot{q}_2^2 \sin q_2 + m_3 \dot{q}_3^2 l \sin q_3 - k_1 q_1 - c_1 \dot{q}_1$$

$$= G_1$$

• para $i=2$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = (J + m_2 R^2) \dot{q}_2 - m_2 R \dot{q}_1 \sin q_2$$

$$\frac{d}{dT} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) = (J + m_2 R^2) \ddot{q}_2 - m_2 R \ddot{q}_1 \sin q_2 + m_2 R \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos q_2$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_2} = m_2 g r \cos q_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_2} = m_2 R \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos q_2$$

$$N_2 = M(\dot{q}_2) = a - b \dot{q}_2$$

$$(J + m_2 R^2) \ddot{q}_2 - m_2 R \ddot{q}_1 \sin q_2 = -m_2 g R \sin q_2 + M(\dot{q}_2) = G_2$$

• para $i=3$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} = [\dot{q}_3 m_3 e^2 + m_3 \dot{q}_1 e \cos q_3]$$

$$\frac{d}{dT} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} \right) = [\ddot{q}_3 m_3 e^2 + m_3 e (\ddot{q}_1 \cos q_3 - \dot{q}_1 \dot{q}_3 \sin q_3)]$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_3} = m_3 g e \sin q_3$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_3} = m_3 e \dot{q}_1 \dot{q}_3 \sin q_3$$

$$N_3 = -c_3 \dot{q}_3$$

$$m_3 e^2 (\ddot{q}_3) + m_3 e (\ddot{q}_1) \cos q_3 = -c_3 (\dot{q}_3) - m_3 g e \sin q_3 = G_3$$

Para aplicar o método de Kramer novamente obtem-se:

$$A = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 + m_3 & -m_2 R \sin q_2 & m_3 e \cos q_3 \\ -m_2 R \sin q_2 & J + m_2 R^2 & 0 \\ m_3 e \cos q_3 & 0 & m_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix}.$$

$$E, \Delta = (m_1 + m_2 + m_3)(J + m_2 R^2)(m_3 e^2) - m_3 e^2 (m_2 R \sin q_3)^2 - (J + m_2 R^2)(m_3 e \cos q_3)^2$$

Assim:

$$\ddot{q}_1 = \frac{G_1(J + m_2 R^2)m_3 e^2 + G_2 m_2 m_3 R e^2 \operatorname{sen} q_2 - G_3(J + m_2 R^2)m_3 e \cos q_3}{\Delta} \quad (9)$$

$$\ddot{q}_2 = \frac{G_2(m_1 + m_2 + m_3) + G_1 m_2 m_3 R e^2 \operatorname{sen} q_2 - G_3 m_2 m_3 e R \cos q_3 \operatorname{sen} q_2 - G_2 m_3^2 e^2 \cos^2 q_3}{\Delta} \quad (10)$$

$$\ddot{q}_3 = \frac{G_3(m_1 + m_2 + m_3)(J + m_2 R^2) - G_3(m_2 R \operatorname{sen} q_2)^2 - G_2 m_2 R \cos q_3 m_3 e \operatorname{sen} q_2 - G_1(J + m_2 R^2)m_3 e \cos q_3}{\Delta} \quad (11)$$

3.1.3 Sistema controlado por TMD

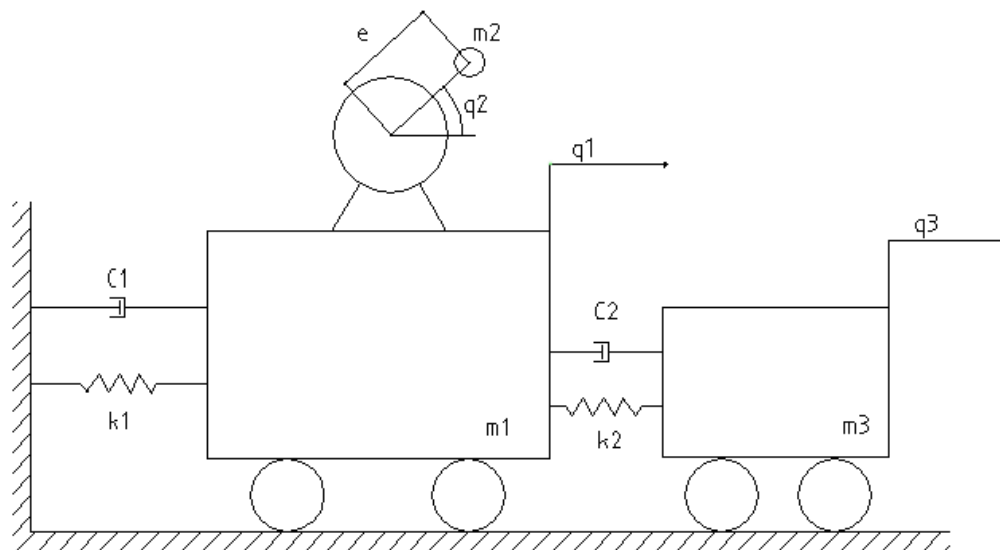


Figura 8: Modelagem do sistema físico controlado por TMD

Neste modelo, acrescenta-se àquele sem controle já apresentado na seção 3.1.1, o TMD. Assim, o bloco está ligado a um bloco (TMD) de massa m_3 através de uma mola de constante elástica k_3 , e um amortecedor de constante c_3 .

Dessa forma, acrescentam-se os seguintes parâmetros ao modelo sem controle, que são descritos na tabela 2.

M_3	Massa do bloco TMD acoplado ao bloco oscilante
k_3	Coeficiente de elasticidade da mola acoplada ao TMD
c_3	Coeficiente de amortecimento do amortecedor acoplado ao TMD

Tabela 3: Descrição dos parâmetros no caso controlado pelo TMD.

A partir dos parâmetros acima tabelados, é possível definir as equações do movimento.

Analogamente ao modelo anteriormente exibido e com a equação de energia cinética T:

$$T = \frac{1}{2} \left[(m_1 + m_2) \dot{q}_1^2 + (J + m_2 R^2) \dot{q}_2^2 - 2 m_2 \dot{q}_1 \dot{q}_3 R \sin q_2 + m_3 \dot{q}_3^2 \right]$$

A equação de energia de deformação U:

$$U = \frac{1}{2} \left[k_1 q_1^2 + k_3 (q_3 - q_1)^2 \right]$$

Assim, a energia potencial é igual a:

$$V = \frac{1}{2} \left[k_1 q_1^2 + k_3 (q_3 - q_1)^2 \right] + m_2 g R \sin q_2$$

Vem que:

• para $i=1$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \left[\dot{q}_1 (m_1 + m_2) - m_2 R \dot{q}_2 \sin q_2 \right]$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) = \left[\ddot{q}_1 (m_1 + m_2) - m_2 R (\ddot{q}_2 \sin q_2 + \dot{q}_2^2 \cos q_2) \right]$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = q_1 (k_1 + k_3) - k_3 q_3$$

$$N_1 = -c_1 \dot{q}_1 + c_3 \dot{q}_3 - c_3 \dot{q}_1$$

• para $i=2$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = (J + m_2 R^2) \dot{q}_2 - m_2 R \dot{q}_1 \sin q_2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) = (J + m_2 R^2) \ddot{q}_2 - m_2 R \ddot{q}_1 \sin q_2 - m_2 R \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos q_2$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_2} = m_2 g R \cos q_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_2} = m_2 R \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos q_2$$

$$N_2 = M(\dot{q}_2) = a - b\dot{q}_2$$

• para $i=3$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} = [m_3(\dot{q}_3)]$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} \right) = [m_3(\ddot{q}_3)]$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_3} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_3} = k_3(q_3 - q_1)$$

$$N_3 = -c_3(\dot{q}_3 - \dot{q}_1)$$

Assim, obtêm-se as seguintes equações de movimento:

• para $i=1$

$$\ddot{q}_1(m_1 + m_2) - m_2 R \ddot{q}_2 \sin q_2 = m_2 R \dot{q}_2^2 \cos q_2 - q_1(k_1 + k_3) + k_3 q_3 - c_1 \dot{q}_1 + c_3 \dot{q}_3 - c_3 \dot{q}_1 = G_1$$

• para $i=2$

$$(J + m_2 R^2) \ddot{q}_2 - m_2 R \ddot{q}_1 \sin q_2 = -m_2 g R \cos q_2 + M(\dot{q}_2) = G_2$$

• para $i=3$

$$m_3(\ddot{q}_3) = -k_3(q_3 - q_1) - c_3(\dot{q}_3 - \dot{q}_1) = G_3$$

Para aplicar o método de Kramer novamente obtem-se:

$$A = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & -m_2 R \sin q_2 & 0 \\ -m_2 R \sin q_2 & J + m_2 R^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix}.$$

$$E, \Delta = (m_1 + m_2)(J + m_2 R^2)m_3 - m_3(m_2 R \cos q_2)^2$$

Assim:

$$\ddot{q}_1 = \frac{G_1(J + m_2 R^2)m_3 + G_2 m_2 m_3 R \sin q_2}{\Delta} \quad (12)$$

$$\ddot{q}_2 = \frac{G_2 m_3 (m_1 + m_2) + G_1 m_2 m_3 R \sin q_2}{\Delta} \quad (13)$$

$$\ddot{q}_3 = \frac{G_3 (m_1 + m_2) (J + m_2 R^2) - G_3 (m_2 R \sin q_2)^2}{\Delta} \quad (14)$$

Os modelos matemáticos descritos nas seções anteriores pelas equações de 7 a 14 foram simulados em MATLAB 7.0 (Haselman e Littlefield (2003)), retornando os resultados que serão apresentados e discutidos nessa seção. Os resultados do MATLAB também foram confrontados em Excel.

4. Pontos de Equilíbrio do sistema

Como descrito na seção 2.3, sabe-se que escrevendo o sistema de equações diferenciais na notação matricial $\dot{x} = f(x)$, os pontos de equilíbrio x^* são encontrados fazendo $f(x)=0$.

Temos imediatamente no caso que $x_2^* = x_4^* = x_6^* = 0$, e substituindo esses valores nas demais equações encontramos que uma condição para que ocorra estado de equilíbrio que se deseja é que $G_i=0$, $i=1, 2, 3$.

A partir desta constatação, pode-se resolver pontos de equilíbrio do sistema nas equações de 7 a 14 e, feitas as substituições das condições de ponto de equilíbrio, temos, da segunda equação, (de cada modelo em análise), que:

$$x_3 = -\arccos\left(\frac{M(0)}{m_2 g R}\right)$$

Da terceira equação obtemos

$$q_1 = q_3$$

Ora, $G_1=0$, como acabara de se impor.

E, portanto

$$q_1 = q_3 = 0$$

Portanto os pontos de equilíbrio são dados por:

$$(0, 0, -\arccos\left(\frac{M(0)}{m_2 g R}\right), 0) - \text{para o modelos sem controle.}$$

$$(0, 0, -\arccos\left(\frac{M(0)}{m_2 g R}\right), 0, 0, 0) - \text{para os modelos controlados.}$$

4.1 Linearização em torno de um ponto de equilíbrio

A linearização de um sistema dinâmico não linear em torno de um ponto de equilíbrio x^* pode permitir analisar a estabilidade desse ponto.

Denotando o sistema dinâmico por $\dot{x} = f(x)$, a linearização é dada por $\dot{x} = f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) = J(x - x^*)$, onde J é a matriz Jacobiana definida por (Ferreira, 2007):

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_6} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_6}{\partial x_1} & \frac{\partial f_6}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_6}{\partial x_6} \end{pmatrix}_{x=x^*}$$

Assim, calculando os autovalores da matriz Jacobiana do sistema estudado no ponto de equilíbrio $(0, 0, -\arccos\left(\frac{M(0)}{m_2 g R}\right), 0, 0, 0)$, variando o parâmetro $M(0)=a$ do motor, podemos analisar a estabilidade do sistema em diferentes casos.

4.2 Análise do ponto de equilíbrio

Nesta seção mostra-se os resultados obtidos da análise dos pontos de equilíbrio dos sistemas em análise. Pretende-se avaliar os auto-valores como já emplicitado na seção 3.3.

Para a simulação dos sistemas utilizou-se o software MATLAB 7.0 e a função ode45, que se utiliza do algoritmo de Runge-Kutta para integração numérica. Os parâmetros experimentados foram extraídos de diversas literaturas a fim de procurar valores que melhor representassem situações de steady-state.

Os parâmetros fixos utilizados nessa simulação são, todos em SI:

$$m_1 = 2 \text{ kg}$$

$$m_2 = 0.2 \text{ kg}$$

$$k1=49512 \text{ N/m}$$

$$z=0.05$$

$$c1=z^2*m1*\sqrt{k1/m1}$$

$$g=9.8 \text{ m/s}^2$$

$$r=0.012 \text{ m (excentricidade do motor)}$$

$$b=0.0015 \text{ J}$$

$$J=m2*r*r$$

Nos modelos controlados adiciona-se a estes parâmetros:

$$m3=0.2 \text{ kg}$$

$$k3=4951.2 \text{ N/m}$$

$$c3= z^2*m3*\sqrt{k3/m3}, \text{ no caso do TMD}$$

$$c3= z^2*m3*\sqrt{g/l}, \text{ no caso do pêndulo}$$

$$e=0.15 \text{ m, no caso do pêndulo}$$

4.2.1 Sistema sem Controle

Neste ponto insere-se os resultados das simulações numéricas obtidas no modelo sem controle para os parâmetros fixos, variado-se o valor de $M(0)$.

Para a definição dos parâmetros do parâmetro “a”, foram escolhidas as frequências de ressonância do bloco principal, conforme (Inman, 2001).

a=0,115	a=0,36	a=0,7	a=20
ans = 1.0e+002 * -0.0813 + 1.5347i -0.0813 - 1.5347i -0.1370 + 0.1505i -0.1370 - 0.1505i	ans = 1.0e+002 * -0.0813 + 1.5347i -0.0813 - 1.5347i -0.1370 + 0.1505i -0.1370 - 0.1505i	ans = 1.0e+002 * -0.0809 + 1.5360i -0.0809 - 1.5360i -0.1356 + 0.2000i -0.1356 - 0.2000i	ans = 1.0e+002 * -2.1483 + 1.9483i 2.1607 - 1.9658i 0.0168 + 1.0653i -0.0842 - 1.0478i

Tabela 4: Auto-valores do sistema sem controle em ponto de equilíbrio.

A partir dos auto-valores apresentados, nota-se que o sistema é instável apenas para $a=20$, dentre os valores testados. Espera-se que neste ponto apresente-se

um movimento caótico, sem periodicidade. Em contrapartida, para os valores mais baixos de a , espera-se que o movimento registrado tenha periodicidade.

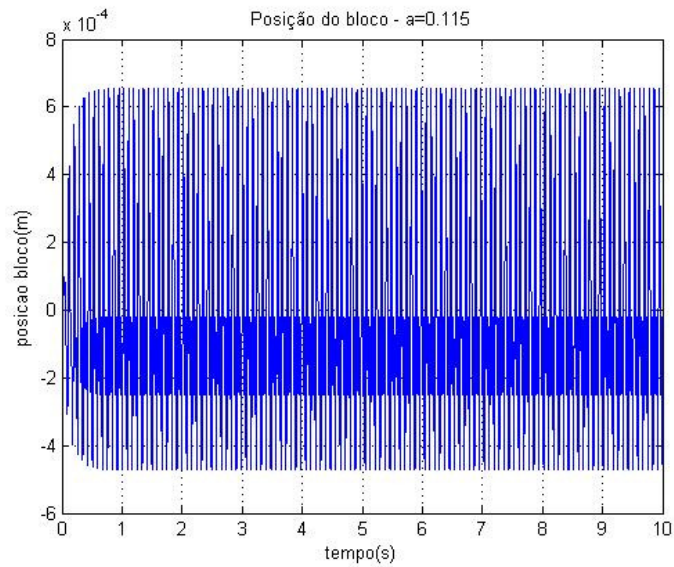


Gráfico 1: Posição do bloco em modelo sem controle ($a=0,115$).

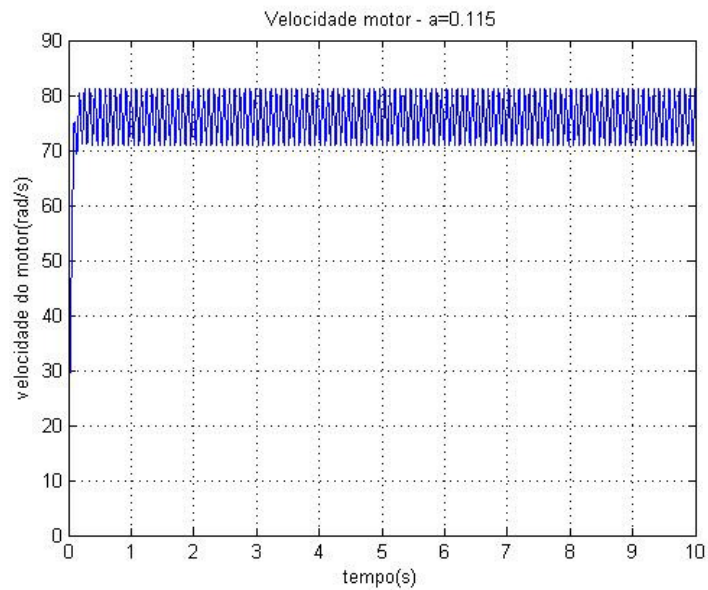


Gráfico 2: : Velocidade do motor em modelo sem controle ($a=0,115$).

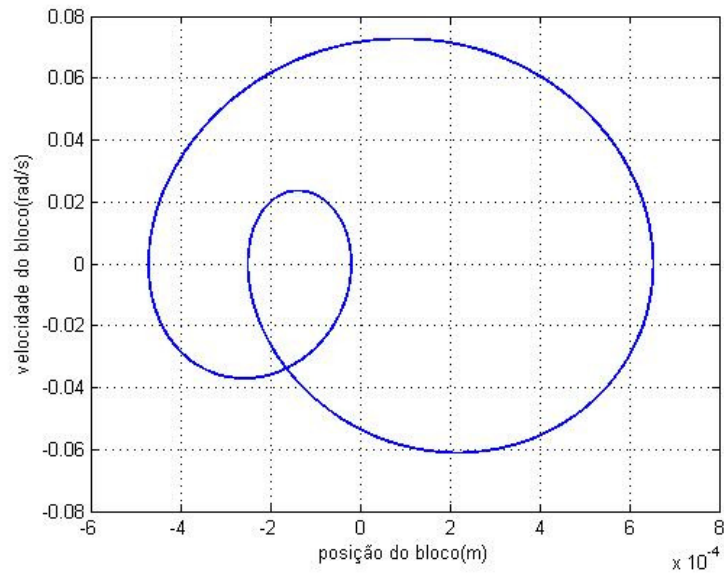
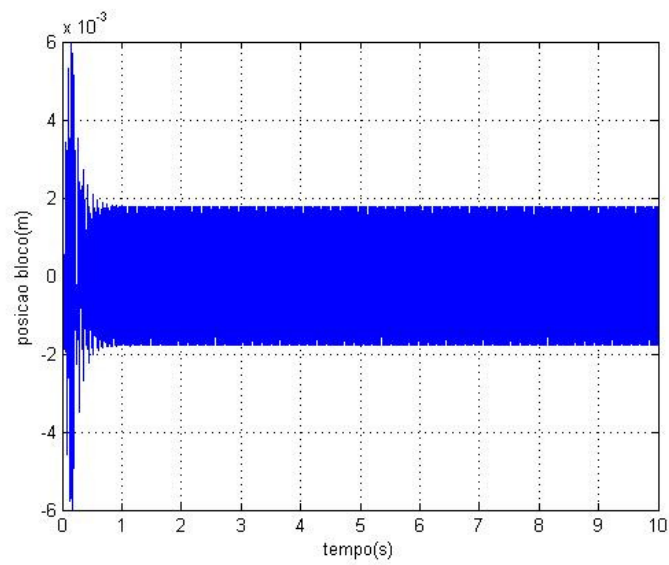
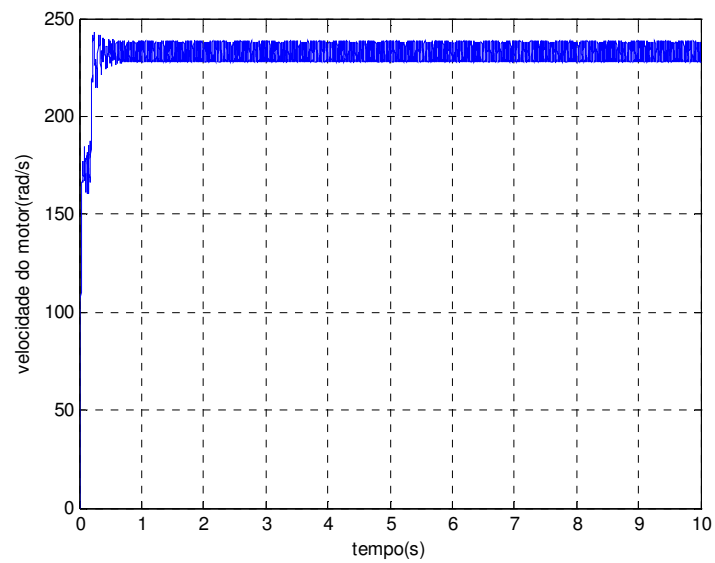


Gráfico 3: Velocidade do bloco pela sua posição (plano de fase) em modelo sem controle ($a=0,115$).

Através dos gráficos de 1 a 3 apresentados infere-se que o movimento registrado é quase periódico, razão pela qual o gráfico da velocidade pela posição (plano de fase) não é exatamente uma circunferência. De fato, a velocidade angular apresenta-se bem abaixo da natural.

Como esperado, os regimes permanentes em $a=0,36$ e $a=0,7$ registraram periodicidade.

Gráfico 4: Posição do bloco em modelo sem controle ($a=0,36$).Gráfico 5: Velocidade do motor em modelo sem controle ($a=0,36$).

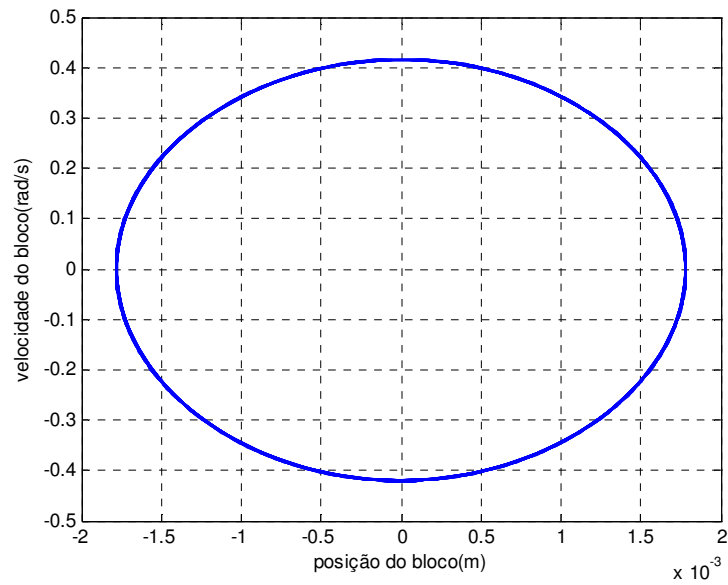


Gráfico 6: Velocidade do bloco (plano de fase) em modelo sem controle ($a=0,36$).

Gráficos com essa característica como a do gráfico 6 podem ser ditos como apresentando estabilidade assintótica em que o ponto não retorna ao inicial mas permanece em uma região próxima a ele.

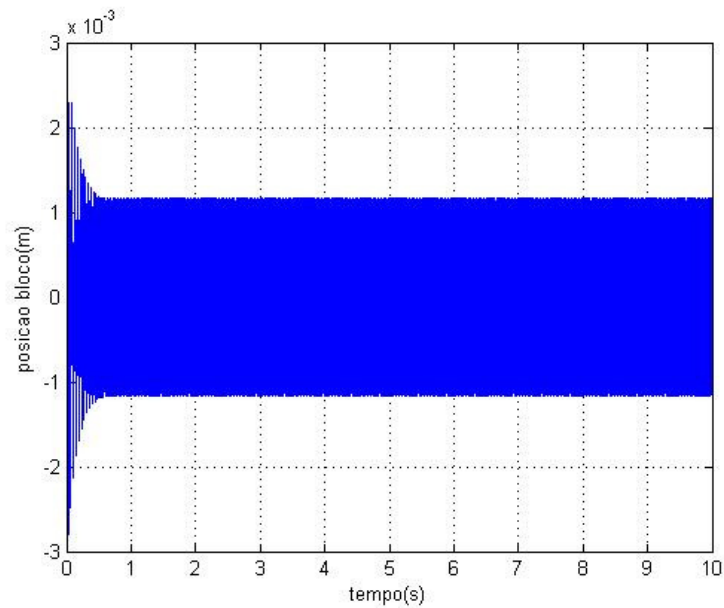
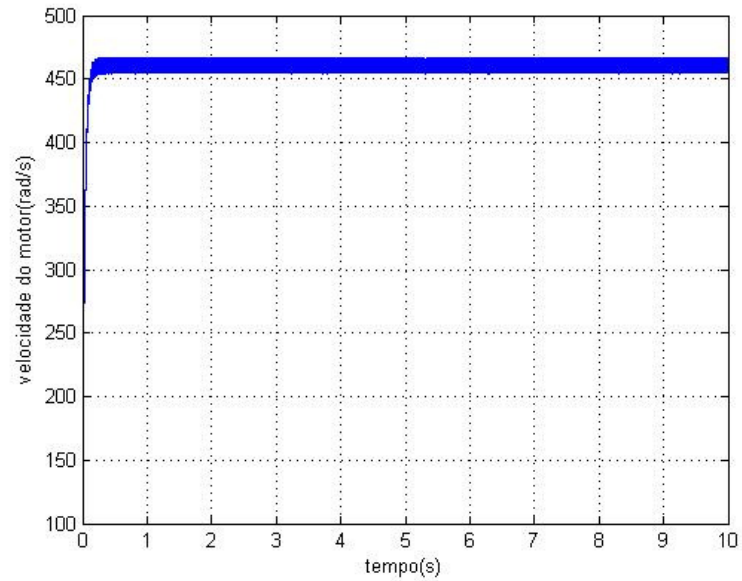
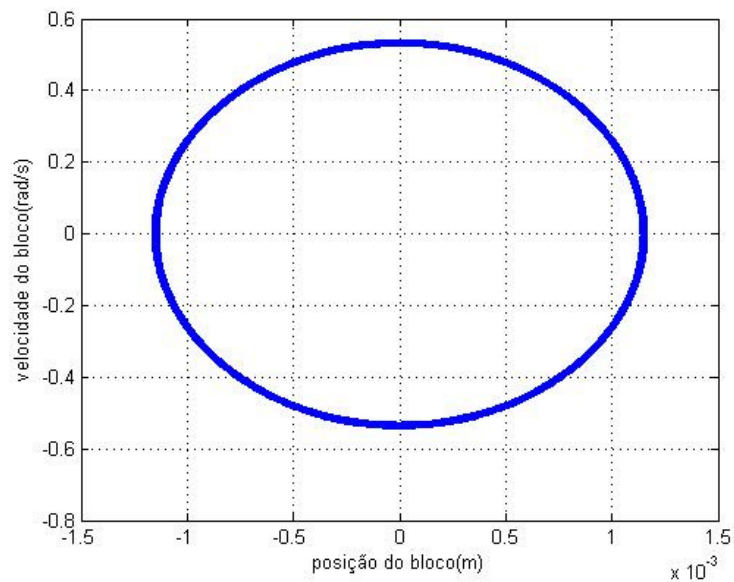


Gráfico 7: Posição do bloco em modelo sem controle ($a=0,7$).Gráfico 8: Velocidade do motor em modelo sem controle ($a=0,7$).Gráfico 9: Velocidade do bloco pela sua posição(plano de fase) em modelo sem controle ($a=0,7$).

As respostas para $a=20$, também como esperado pela análise de auto-valores, apresentam-se sem periodicidade definida¹.

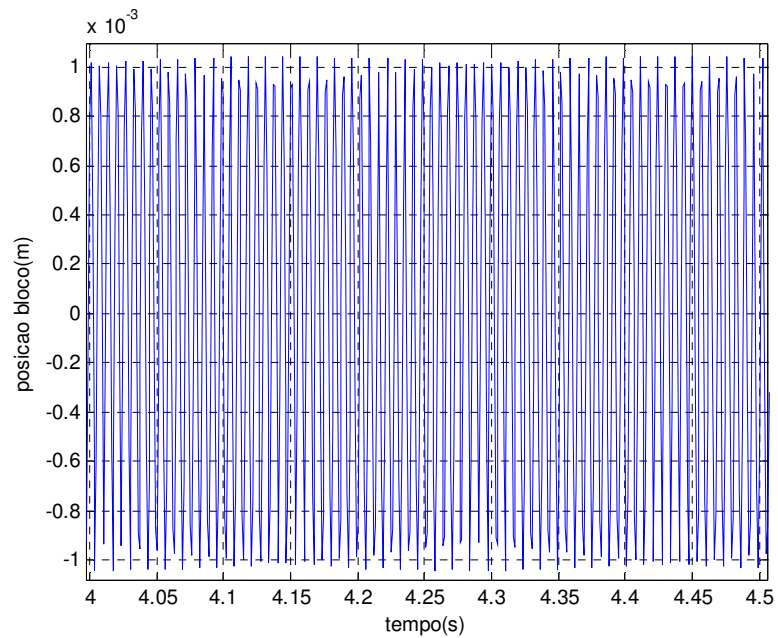


Gráfico 10: Posição do bloco em modelo sem controle ($a=20$).

¹ Foi aplicado *zoom* nos gráficos para melhor visualização do movimento.

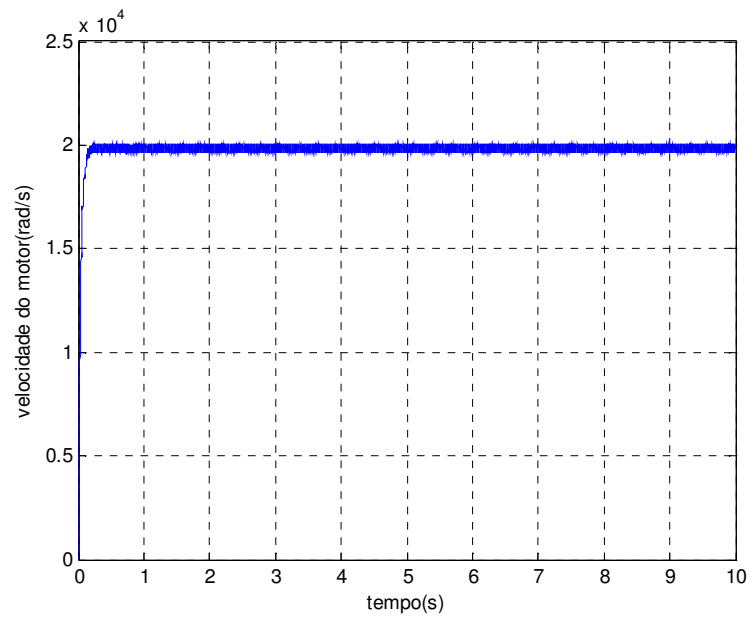


Gráfico 11: Velocidade do motor em modelo sem controle ($a=20$).

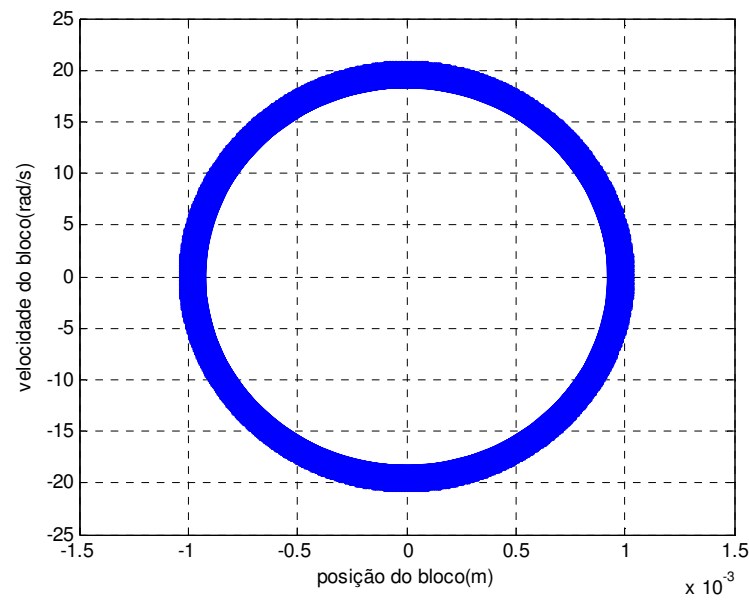


Gráfico 12: Velocidade do bloco pela sua posição (plano de fase) em modelo sem controle ($a=20$).

A partir dos resultados relacionado neste item comprova-se o estado instável do movimento em $a=20$, como esperado pela análise de estabilidade.

Nota-se facilmente a ausência de periodicidade registrada pelo movimento do bloco neste caso, o que comprova aquilo que era esperado da análise de estabilidade. Além disso, a velocidade de regime permanente registrada pelo motor é 200 vezes maior do que aquela para valores mais baixos de $M(0)$.

4.2.2 Modelo controlado por pêndulo

A seguir, apresentam-se as respostas obtidas para a simulação do modelo controlado por pêndulo. A análise de estabilidade é análoga àquela utilizada no modelo sem controle. Porém, espera-se que as amplitudes do movimento, por exemplo, sejam menores, condição proporcionada pelo método de controle aqui apresentado.

a=0,11	a=0,35	a=0,7	a=5
<pre>ans = 1.0e+002 * -0.0625 + 1.4850i -0.0625 - 1.4850i -0.5478 -0.0213 + 0.0579i -0.0213 - 0.0579i -0.0123</pre>	<pre>ans = 1.0e+002 * -0.0624 + 1.4849i -0.0624 - 1.4849i -0.5478 -0.0213 + 0.0575i -0.0213 - 0.0575i -0.0123</pre>	<pre>ans = 1.0e+002 * -0.0624 + 1.4846i -0.0624 - 1.4846i -0.5478 -0.0213 + 0.0562i -0.0213 - 0.0562i -0.0123</pre>	<pre>ans = 1.0e+002 * -0.0497 - 1.4574i -0.0685 + 1.4567i -0.5477 + 0.0002i 0.1216 - 0.1428i -0.1641 + 0.1433i -0.0123 + 0.0000i</pre>

Tabela 5: Auto-valores do sistema controlado por pêndulo em ponto de equilíbrio.

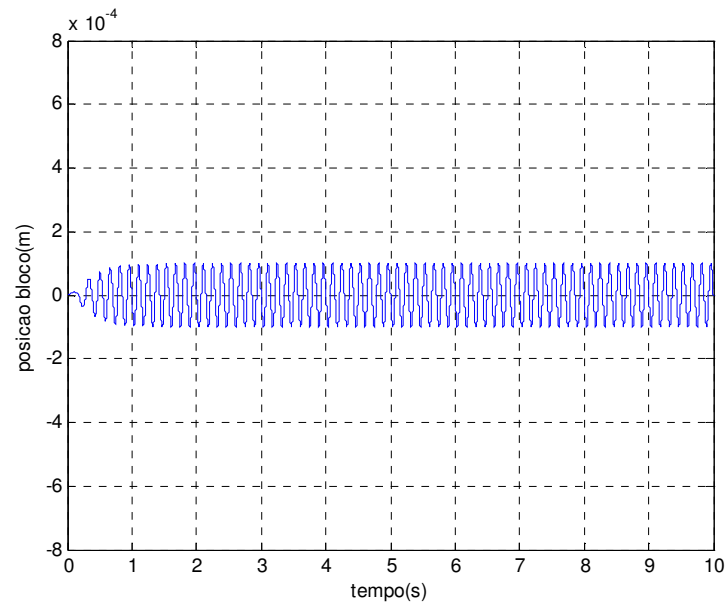


Gráfico 13: Posição do bloco em modelo controlado por pêndulo ($a=0,11$).

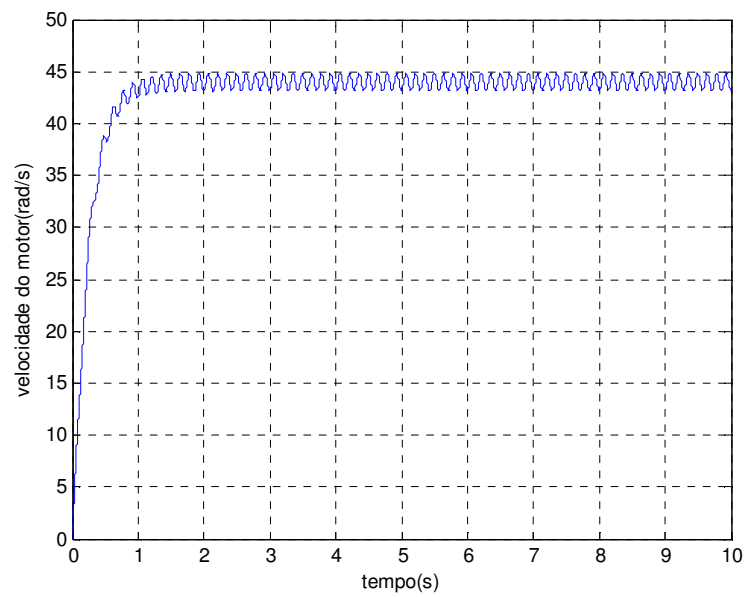


Gráfico 14: Velocidade do motor em sistema controlado por pêndulo ($a=0,11$).

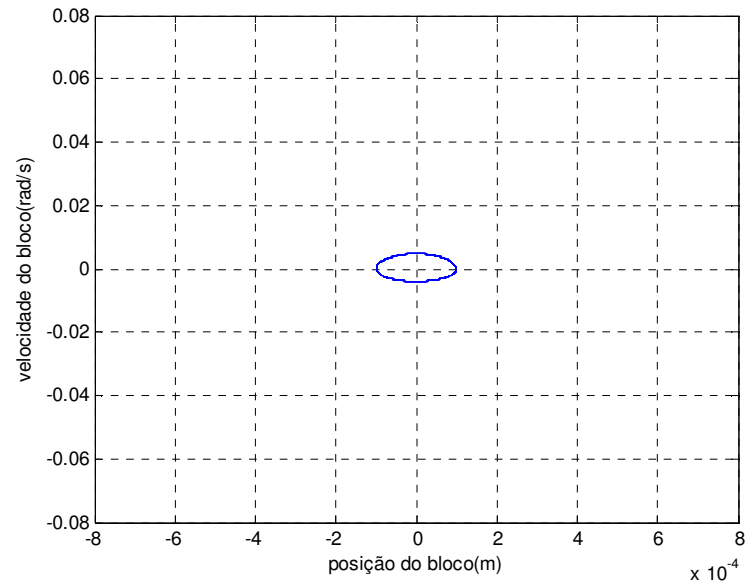


Gráfico 15: Velocidade do bloco por sua posição (plano de fase) em sistema controlado por pêndulo ($a=0,11$).

O gráfico 15, comparado ao gráfico 3, obtido da simulação sem controle com $a=0,11$ permite visualização da utilidade do sistema controlado por pêndulo. É evidente que a amplitude de movimento foi bastante diminuída, tanto no que concerne à posição do bloco quanto com relação à velocidade desse movimento.

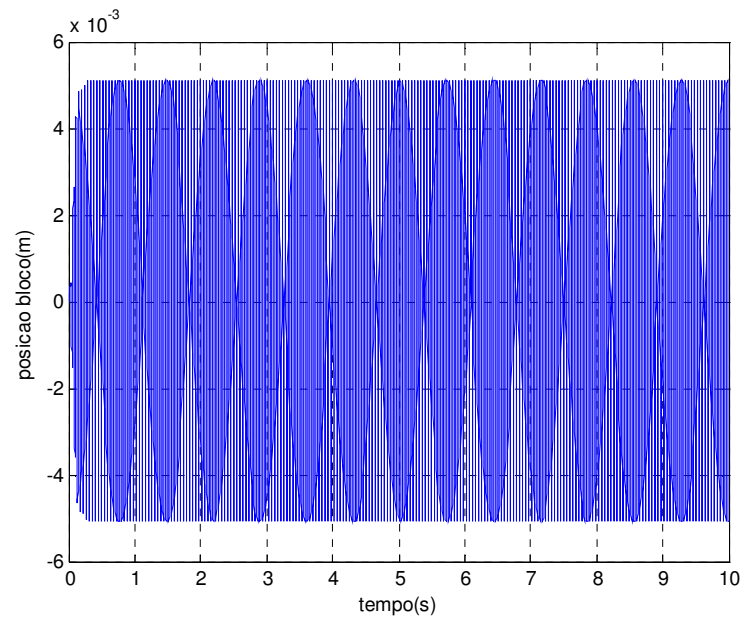


Gráfico 16: Posição do bloco em modelo controlado por pêndulo ($a=0,36$).

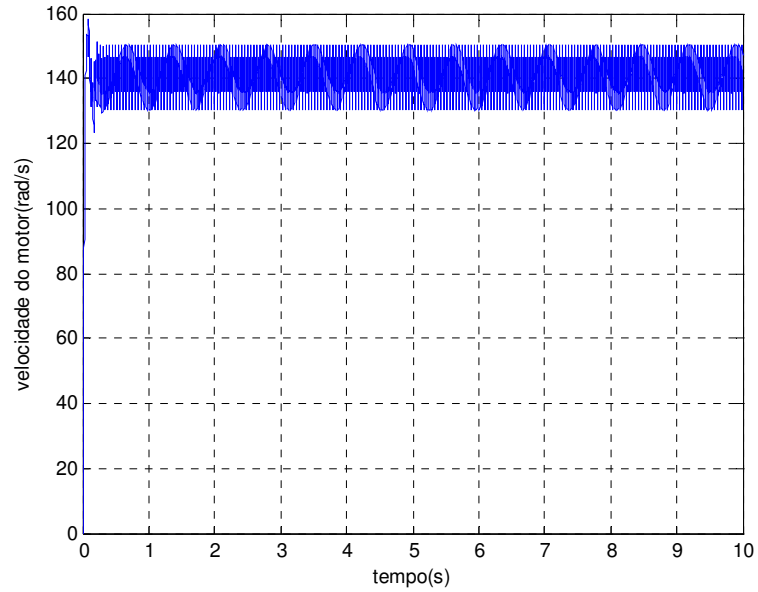


Gráfico 17: Velocidade do motor em modelo controlado por pêndulo ($a=0,36$).

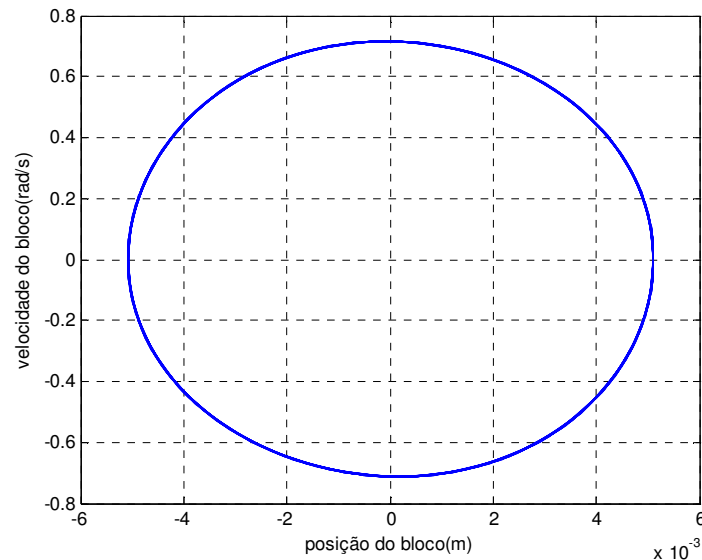


Gráfico 18: Velocidade pela posição do bloco (plano de fase) em modelo controlado por pêndulo ($a=0,36$).

Em primeira análise, os gráficos obtidos pelo modelo controlado por pêndulo, comparado àquele obtido pelo modelo sem controle em $a=0,35$ parece insatisfatório uma vez que as amplitudes de movimento em regime permanente apresentam valores mais altos do que naquele do modelo sem controle. Em segunda análise, entretanto, nota-se que o movimento registrado no período transitório é mais satisfatório no modelo controlado por pêndulo. As amplitudes de movimento que chegam a 6mm no modelo sem controle em $a=0,36$ podem ser danosas à estrutura.

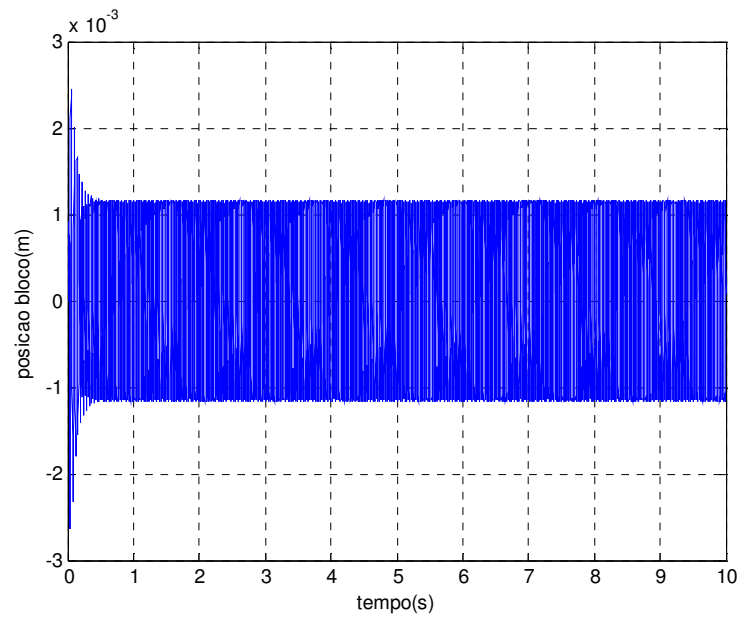


Gráfico 19: Posição do bloco em modelo controlado por pêndulo ($a=0,7$).

Contrariamente ao que esperava-se, o modelo controlado por pêndulo em $a=0,7$ apresenta movimento de amplitudes muito parecidas com as do modelo sem controle. Os estudos paramétricos mostram-se determinantes para o dimensionamento dos parâmetros para melhor operação do sistema controlado por pêndulo.

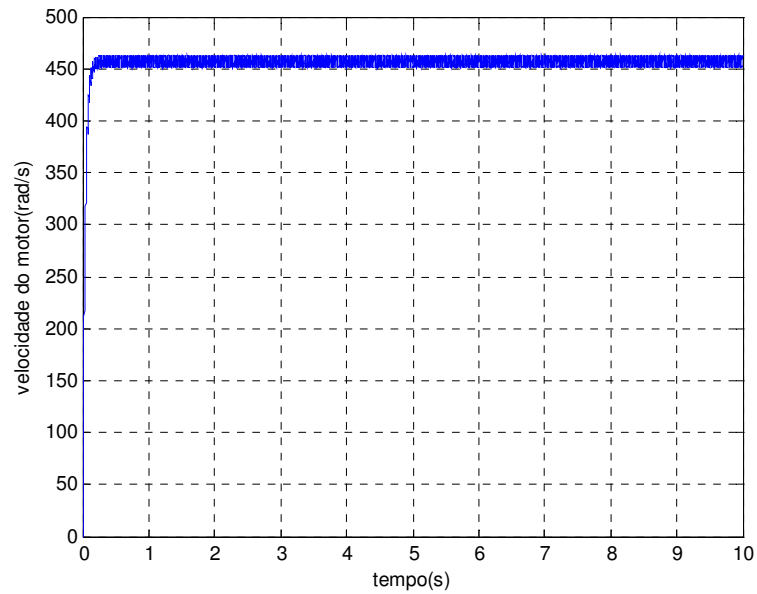


Gráfico 20: Velocidade do motor em modelo controlado por pêndulo ($a=0,7$).

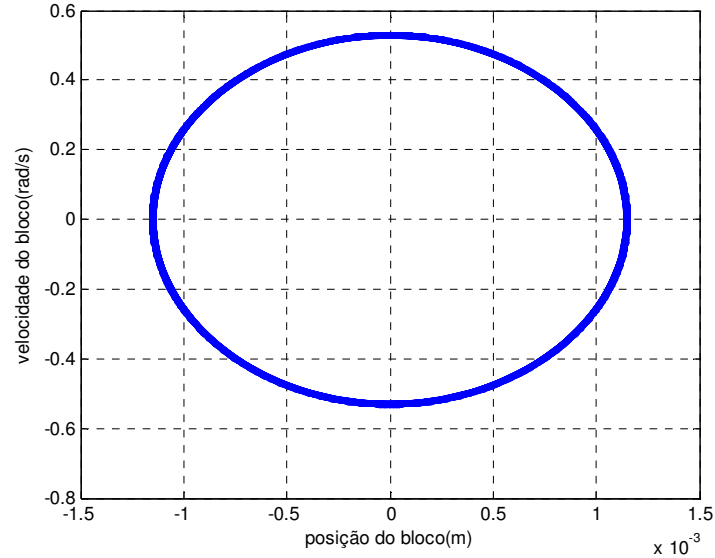


Gráfico 21: Velocidade pela posição do bloco (plano de fase) em modelo controlado por pêndulo ($a=0,7$).

A amplitude do movimento, como já observado, é muito semelhante ao modelo sem controle. Ao que concerne a análise de estabilidade, todos os modelos apresentam-se com movimentação periódica. O próximo valor de a , entretanto,

revela, como esperado, já que existe um autovalor com parte real maior que zero, um movimento instável e sem periodicidade definida.

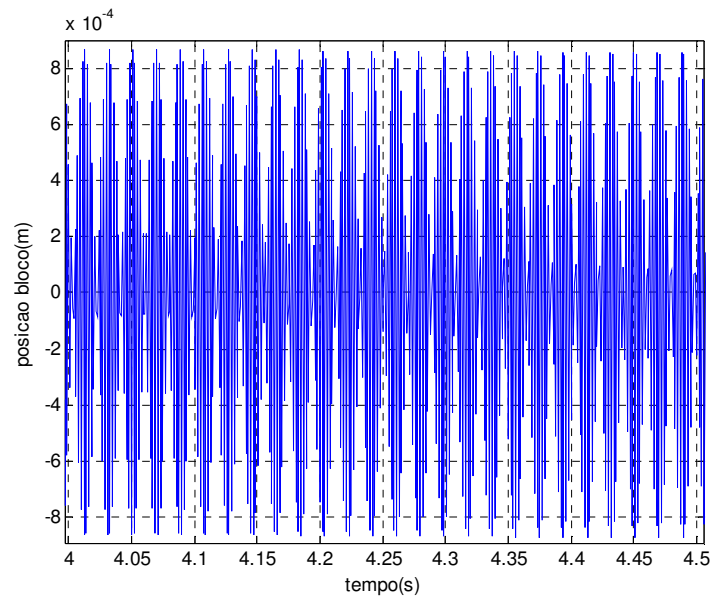


Gráfico 22: Posição do bloco em modelo controlado por pêndulo ($a=5$) – zoom.

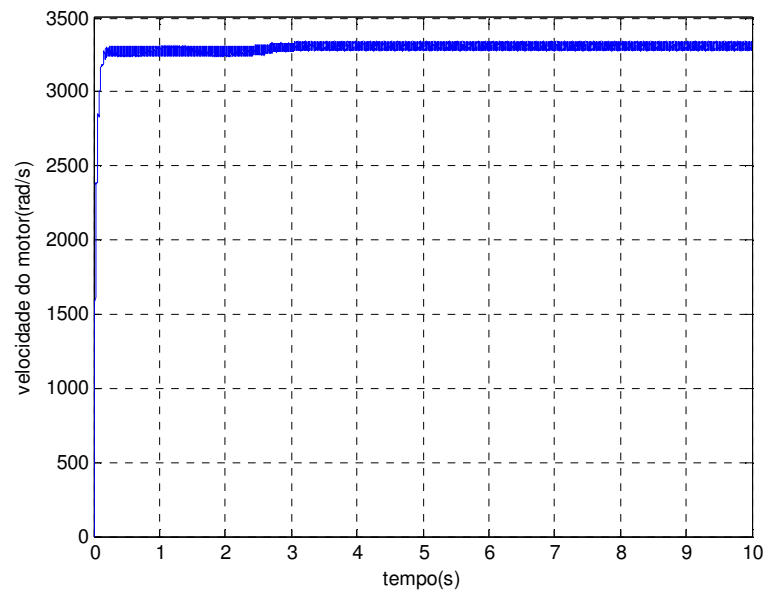


Gráfico 23: Velocidade do motor em modelo controlado por pêndulo ($a=5$).

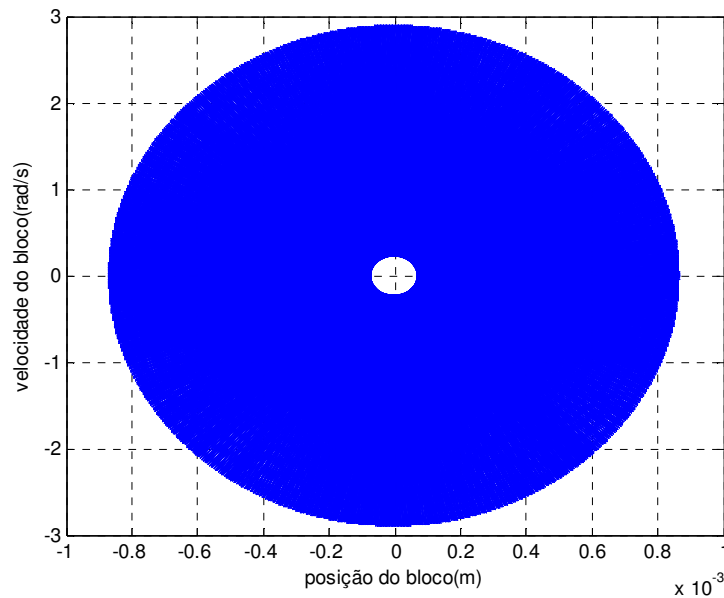


Gráfico 24: Velocidade pela posição (plano de fase) do bloco em modelo controlado por pêndulo ($a=5$).

A análise do gráfico 22 revela que o movimento em $a=5$ é instável não apresentando periodicidade perceptível. Assim como apresentado no modelo sem controle com $a=20$, a velocidade média do motor é muito maior do que aquela registrada para os valores de a mais baixos que apresentam movimentos periódicos. Além disso, o fato de o gráfico 24 da velocidade pela posição da estrutura ter grossura maior do que aquele apresentado por aqueles com valores menores de a revela que o bloco se afasta do ponto inicial, caracterizando a instabilidade do movimento.

4.2.3 Modelo controlado por TMD

No sistema controlado por TMD, assim como nos anteriores, nota-se a existência de movimento instável com altos valores de a .

Para a definição dos parâmetros do controle por TMD, admitiram-se as frequências de ressonância do bloco principal e da massa de TMD segundo a teoria clássica de sistemas lineares, conforme (Inman, 2001).

a=0,1	a=0,3	a=0,7	a=5
ans = 1.0e+002 * -0.0634 + 1.7688i -0.0634 - 1.7688i -0.0246 + 1.2973i -0.0246 - 1.2973i -0.0213 + 0.0579i -0.0213 - 0.0579i	ans = 1.0e+002 * -0.0634 + 1.7688i -0.0634 - 1.7688i -0.0246 + 1.2972i -0.0246 - 1.2972i -0.0213 + 0.0576i -0.0213 - 0.0576i	ans = 1.0e+002 * -0.0634 + 1.7685i -0.0634 - 1.7685i -0.0246 + 1.2971i -0.0246 - 1.2971i -0.0213 + 0.0562i -0.0213 - 0.0562i	ans = 1.0e+002 * -0.0602 - 1.7500i -0.0174 - 1.2868i -0.0684 + 1.7510i -0.0275 + 1.2852i -0.1641 + 0.1433i 0.1216 - 0.1428i

Tabela 6: Auto-valores do sistema controlado por TMD em ponto de equilíbrio.

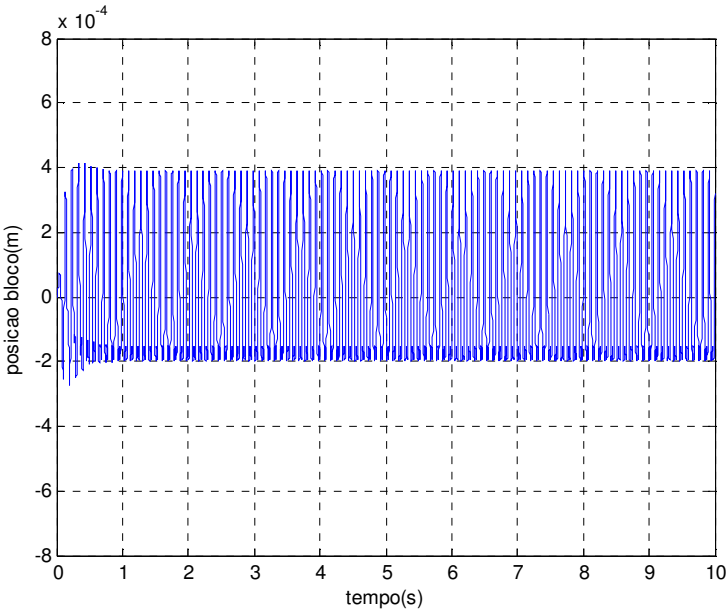


Gráfico 25: Posição do bloco em modelo controlado por TMD (a=0,1).

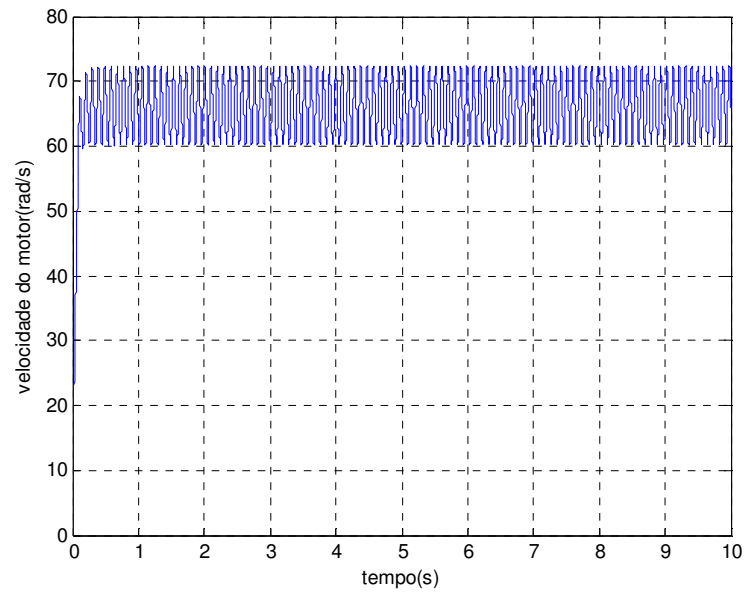


Gráfico 26:: velocidade do motor em sistema controlado por TMD ($a=0,1$).

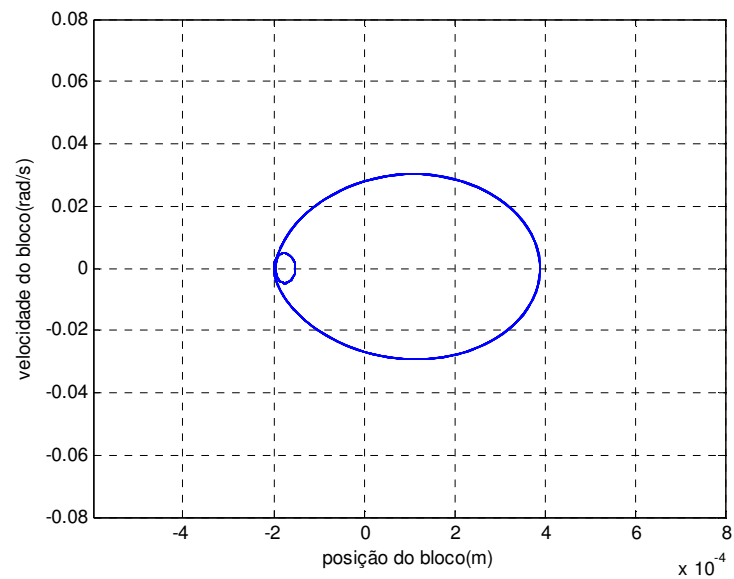


Gráfico 27: Velocidade pela posição do bloco em sistema controlado por TMD ($a=0,1$).

O movimento comporta-se analogamente em todos os sistemas testados com o parâmetro a próximo a 0,1. O fato de o gráfico 27 ser parecido com uma elipse deve-se ao fato de que a amplitude de movimento do bloco é maior do que a

amplitude de velocidade atingida pelo sistema. Também nota-se que a amplitude da posição do bloco não é dada ao redor do ponto de posição 0. Essa condição de operação pode não ser interessante.

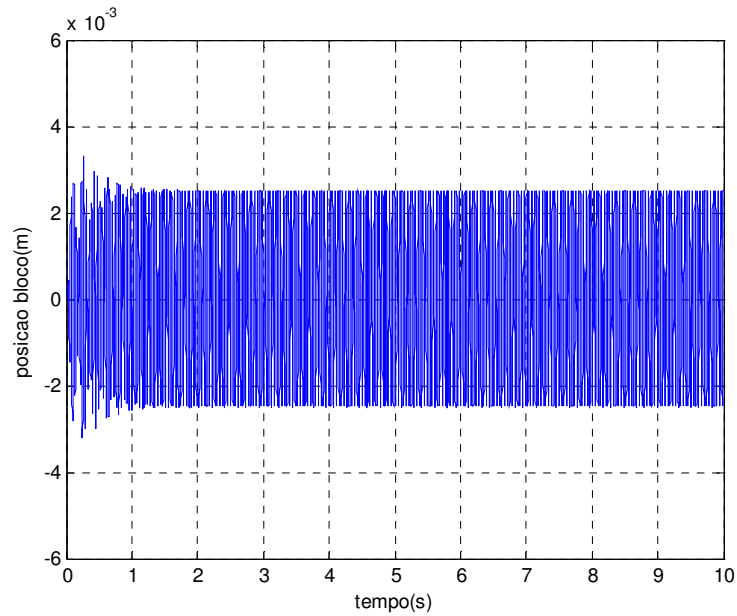


Gráfico 28: Posição do bloco em sistema controlado por TMD ($a=0,3$).

Assim como o comportamento verificado no modelo controlado por pêndulo, para a na região estável de operação, a simulação com sistema de controle fornece menores amplitudes no regime transitório apesar de maior amplitude de movimento em regime permanente.

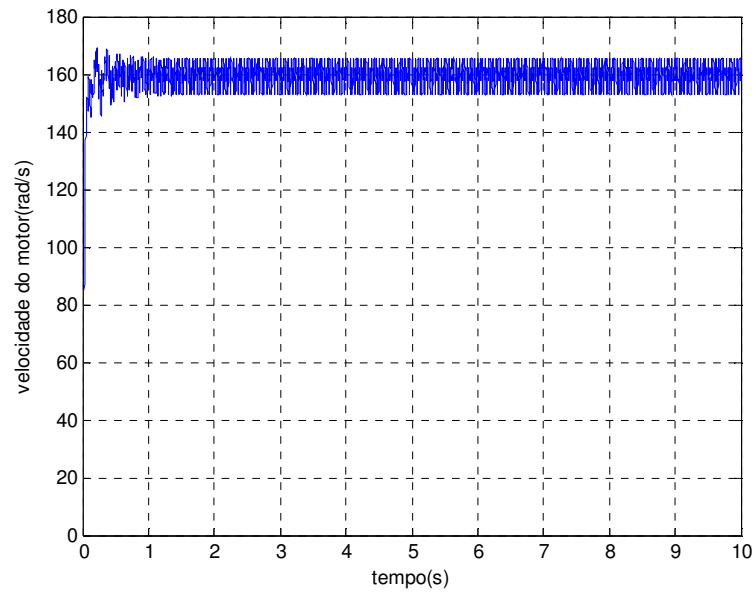


Gráfico 29: Velocidade de rotação do motor em sistema controlado por TMD ($a=0,3$).

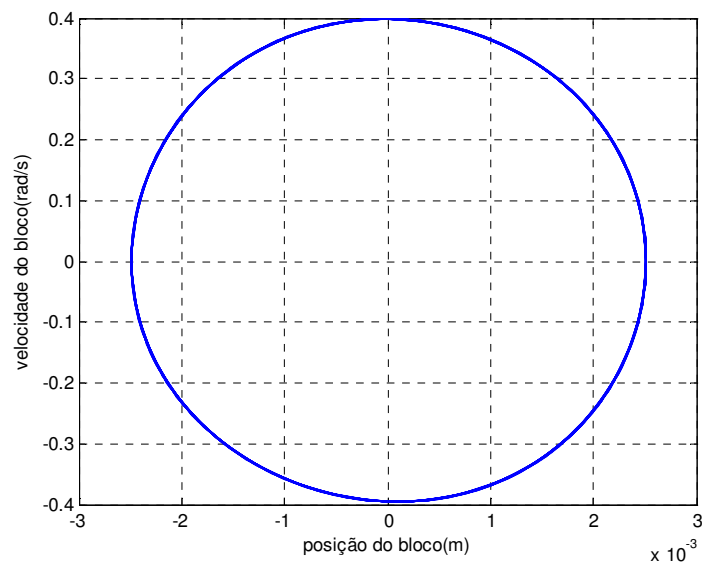


Gráfico 30: Posição do bloco por sua velocidade em modelo controlado por TMD ($a=0,3$).

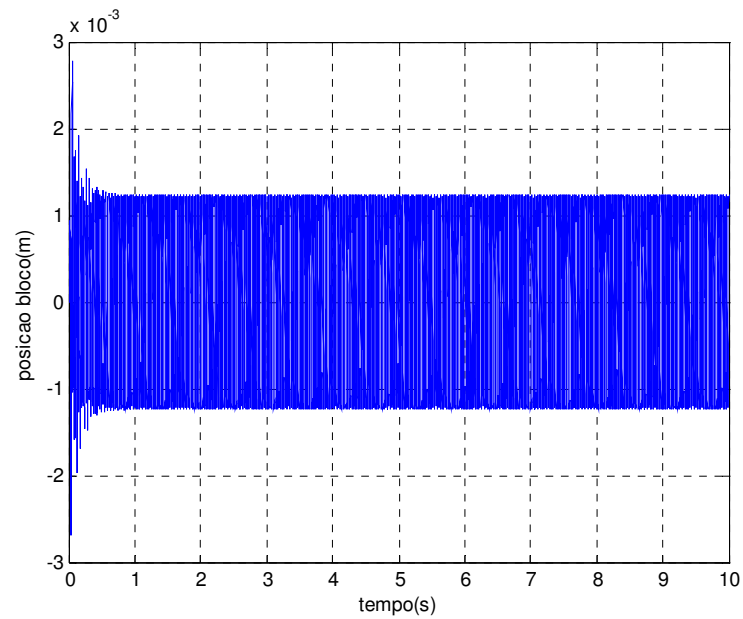


Gráfico 31: Posição do bloco em sistema controlado por TMD ($a=0,7$).

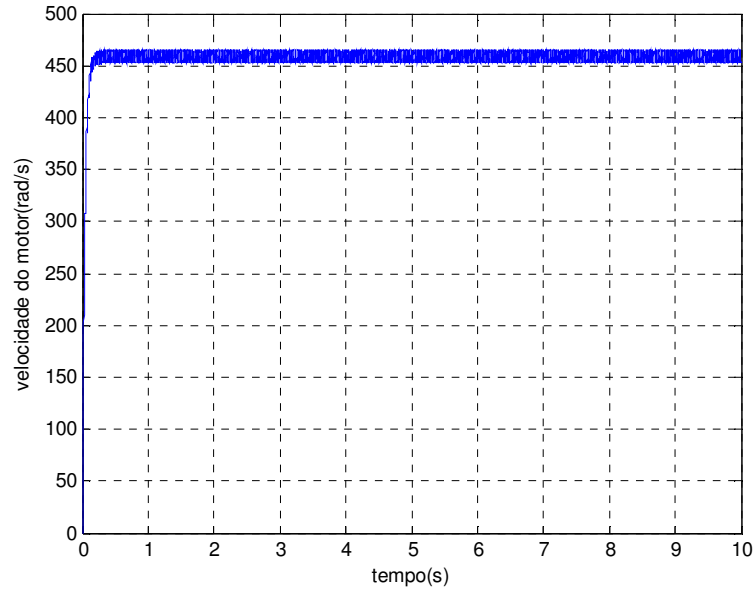


Gráfico 32: Velocidade de rotação do motor em modelo controlado por TMD ($a=0,7$).

Novamente, assim como apresentado no modelo controlado por pêndulo, o movimento registrado em $a=0,7$ apresentou características de operação

aparentemente menos favoráveis no sistema controlado do que naquele sem controle. É interessante notar como a partir desse valor de parâmetro, tanto a amplitude de movimento em regime transitório como o permanente são maiores no sistema controlado do que no sistema sem controle, condições não pretendidas.

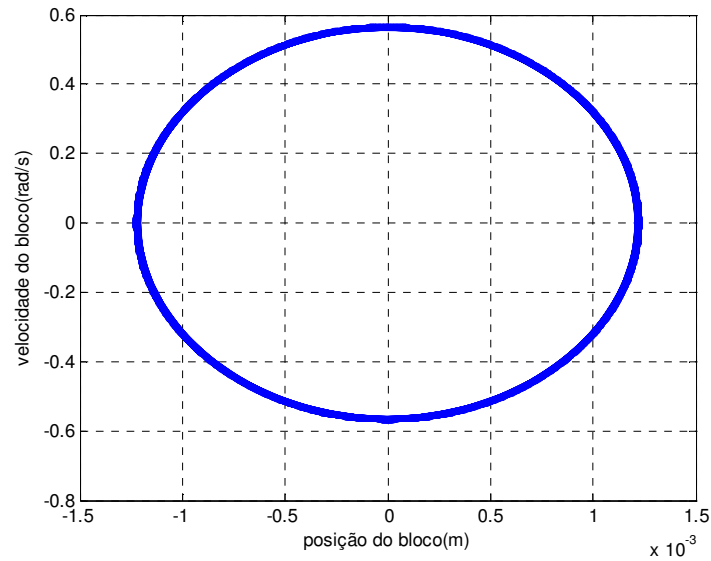


Gráfico 33: Velocidade do bloco pela posição (plano de fase) em modelo controlado por TMD ($a=0,7$).

O sistema, entretanto, possui sempre características periódicas para esses baixos valores de $M(0)$.

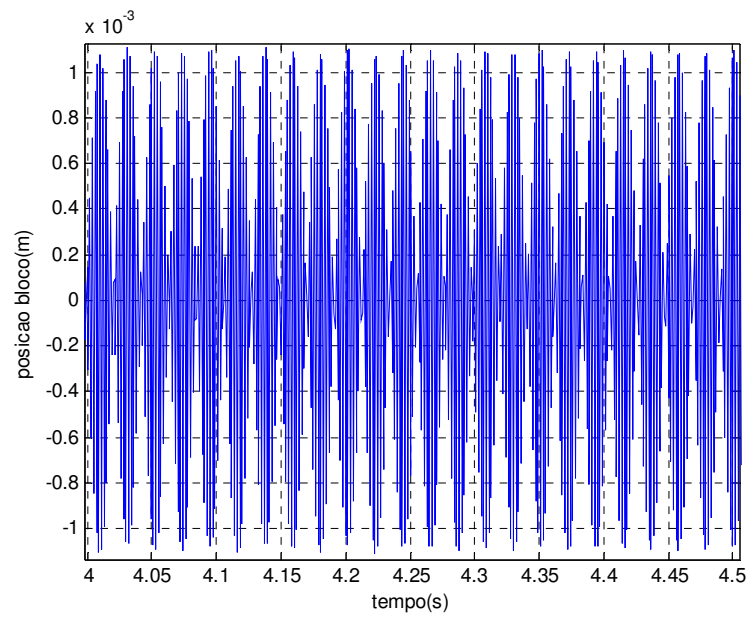


Gráfico 34: Posição do bloco em sistema controlado por TMD ($a=5$).

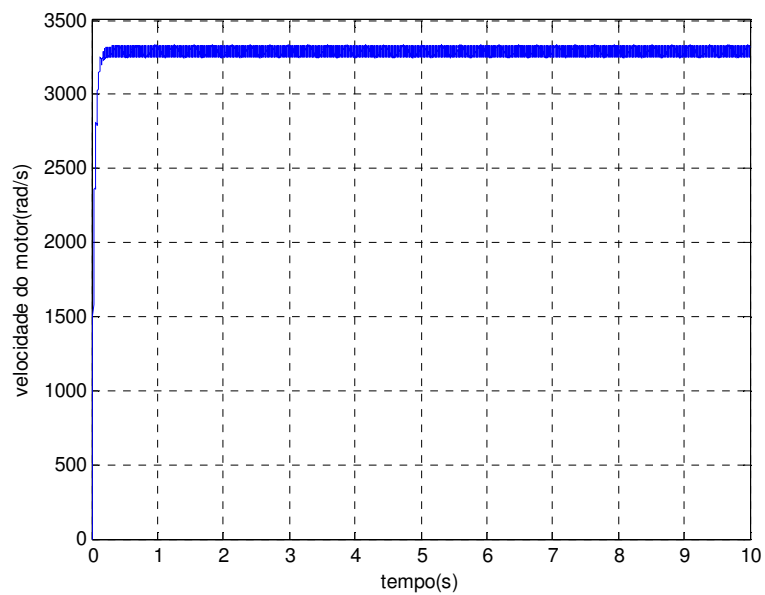


Gráfico 35: velocidade de rotação do motor em sistema controlado por TMD ($a=5$).

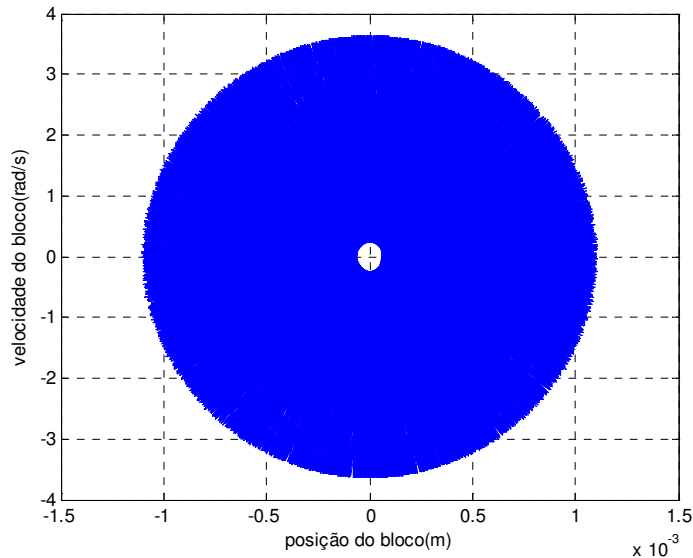


Gráfico 36: velocidade do bloco por sua posição (plano de fase) em sistema controlado por TMD ($a=5$).

Os gráficos anteriores, de 34 a 36, com sistema simulado em $a=5$ demonstram a instabilidade do sistema. Ele não apresenta características periódicas de movimento no gráfico da posição do bloco, possui velocidade de rotação altíssimas, bastante distantes da frequência natural de operação. Por último, o gráfico 36 apresenta-se quase que como um círculo, de onde pode-se afirmar que o movimento é instável, o que corrobora com os auto valores apresentados na tabela 6.

Dessa forma pode-se inferir que todos os sistemas apresentam-se de maneira semelhante para valores semelhantes de a . Como era pretendido mostrar, a utilização dos modelos de controle geralmente proporcionou condições de operação mais interessantes do que aquelas apresentadas pelo modelo livre. Este ponto, entretanto, ($a=0,7$) encontra-se após a zona de instabilidade e as condições de operação são muito parecidas tanto para o modelo controlado, quanto para o modelo sem controle. É interessante notar que o usuário deste sistema quer evitar a diminuir o pico do gráfico de energia apresentado na seção 2.2.

Finalmente, para melhor comparação, pode-se tabular os resultados obtidos para cada modelo nas tabelas 7, 8 e 9.

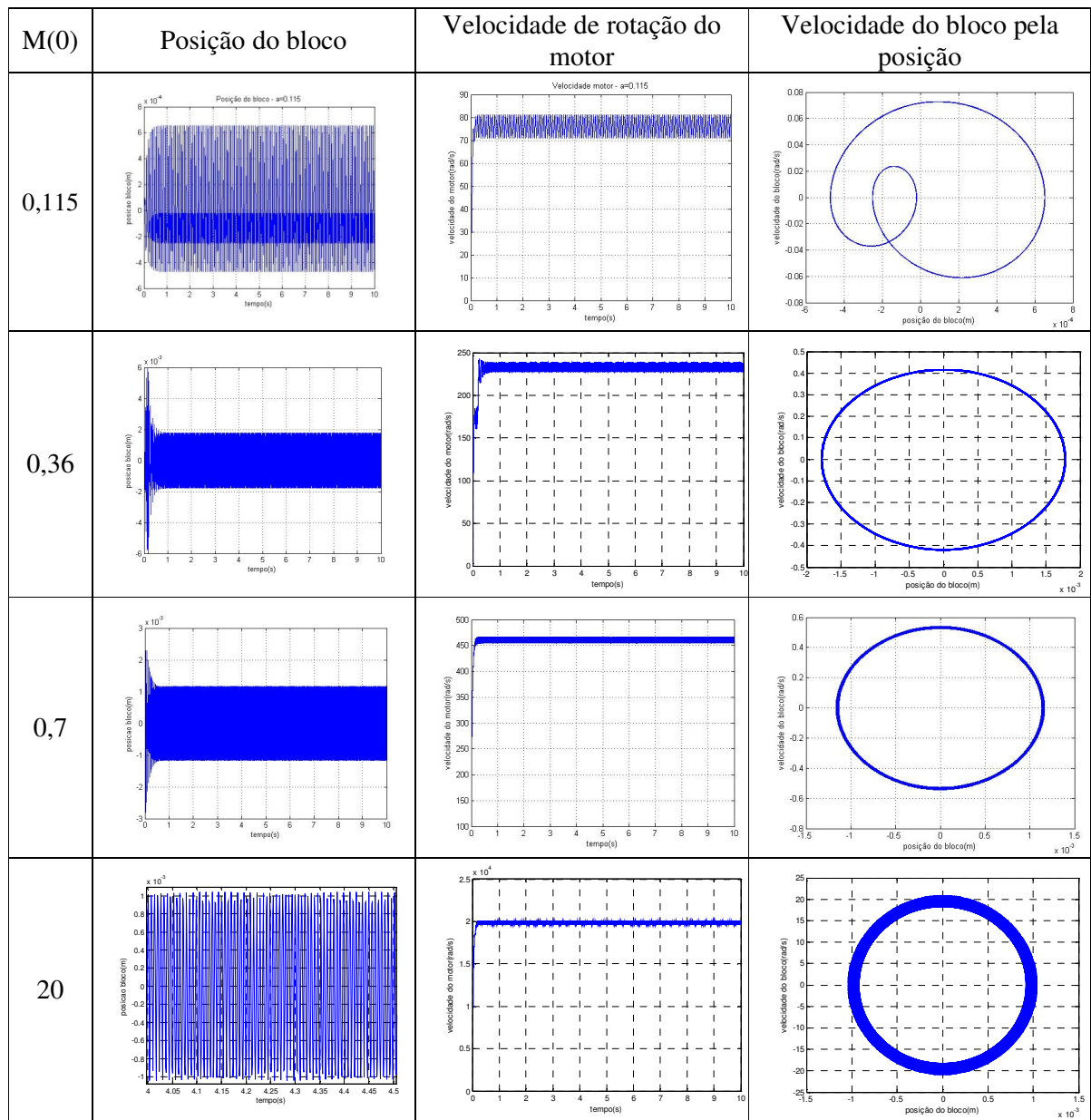


Tabela 7: Resultados para modelo sem controle.

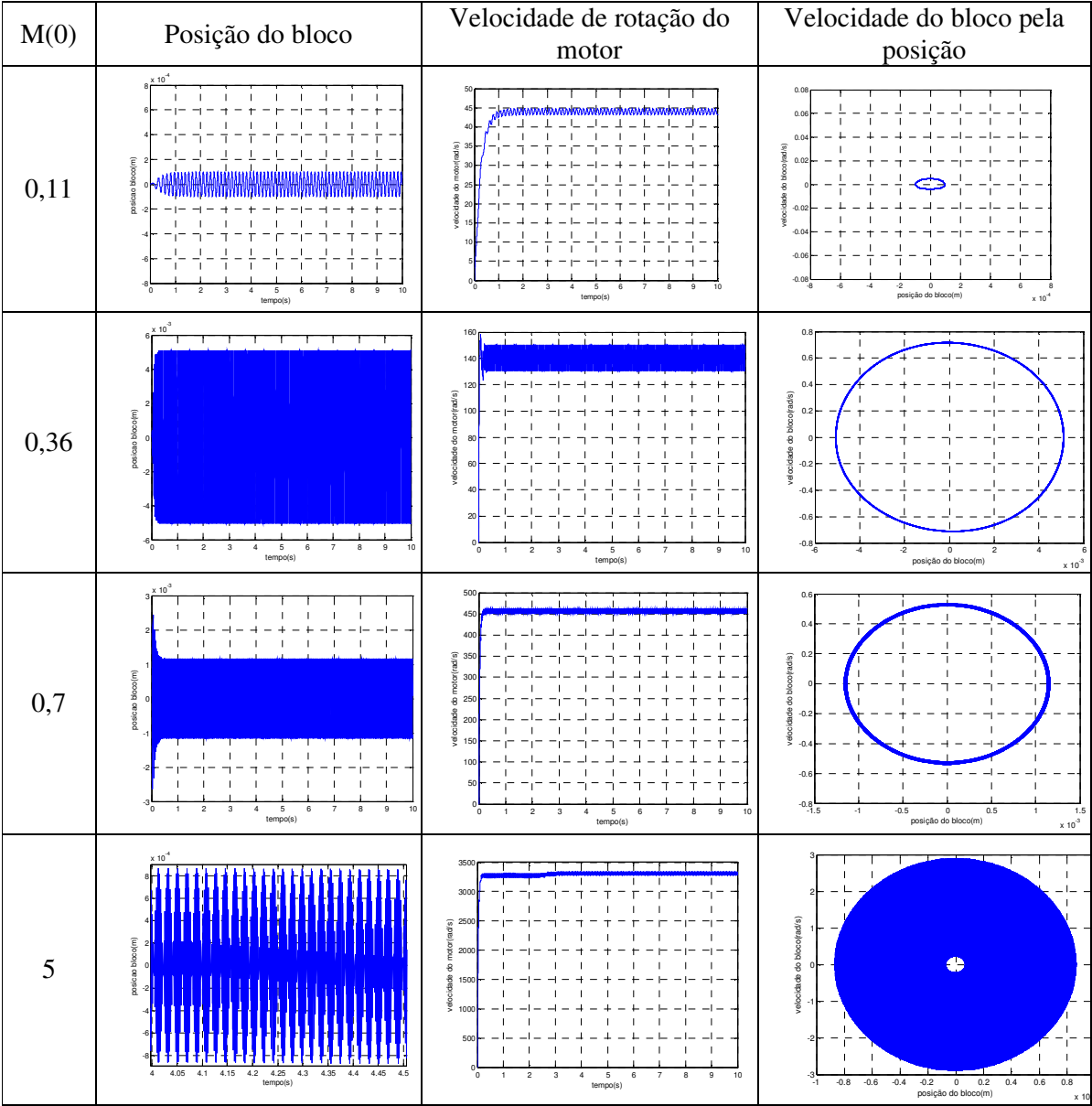


Tabela 8: Resultados para modelo controlado por pêndulo.

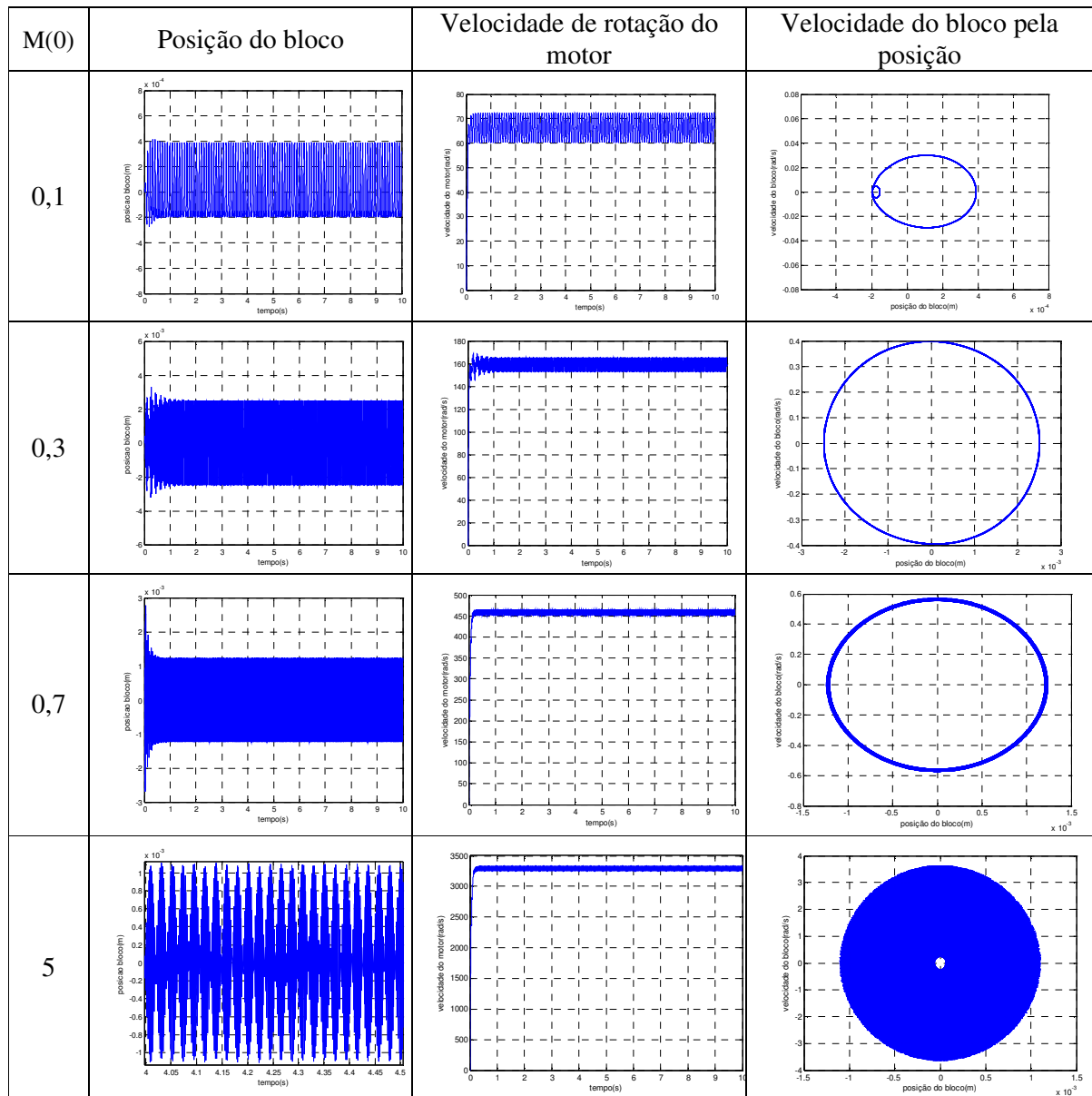


Tabela 9: Resultados para modelo controlado por TMD.

5. Estudos Paramétricos

Com o objetivo de otimizar a redução das oscilações do bloco principal, foram efetuados estudos paramétricos nos sistemas de controle, dessa forma, foi possível analisar o impacto causado por cada parâmetro de interesse. Lembrando que, como os modelos utilizando são não lineares, a teoria clássica de sistemas de controle pode não ser consistente.

Para um melhor entendimento do sistema a ser controlado, foram efetuados estudos em torno do raio do desbalanceamento do motor, e do coeficiente de amortecimento da massa principal, fixados os outros parâmetros.

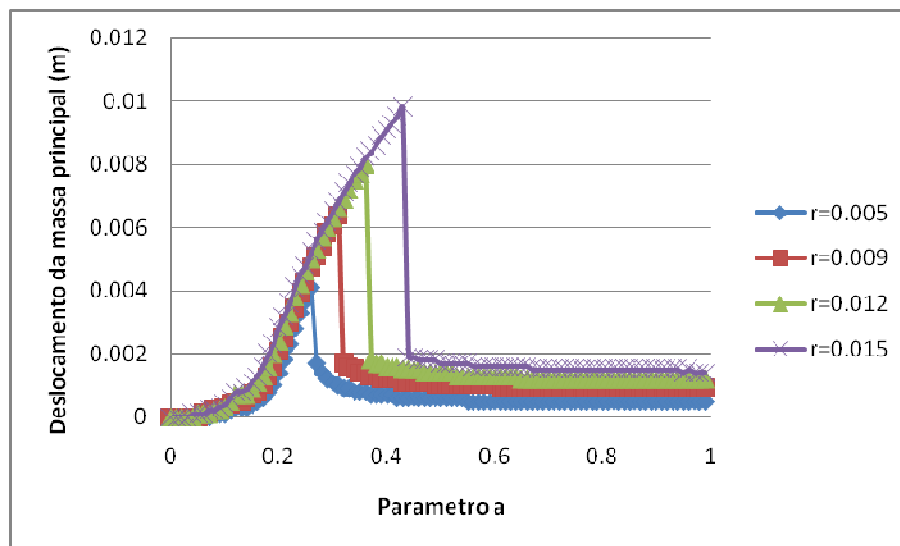


Gráfico 37: Comparação da curva de energia para diferentes valores de raio

Como esperado, um aumento no raio implica em um aumento no desbalanceamento do motor, e conseqüentemente, a força resultante na massa principal será maior, gerando maiores deslocamentos.

Para os estudos posteriores será utilizado o valor de $r=0.012m$.

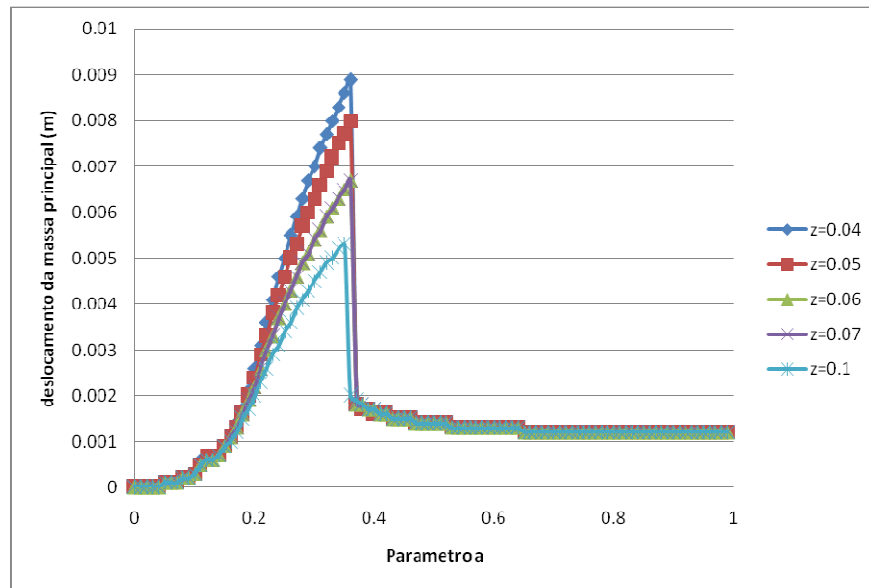


Gráfico 38: Energia em função da variação do amortecimento z .

Como previsto, com o aumento do amortecimento, o deslocamento da massa principal decai, para análises posteriores utilizaremos o valor de $z=0.05$, valor geralmente utilizado nesse tipo de estrutura. A simulação evidencia pela primeira vez o fenômeno de queda do consumo e aumento da velocidade de rotação comentado na seção 2.3.

Para esse sistema, seguem os gráficos do seu comportamento.

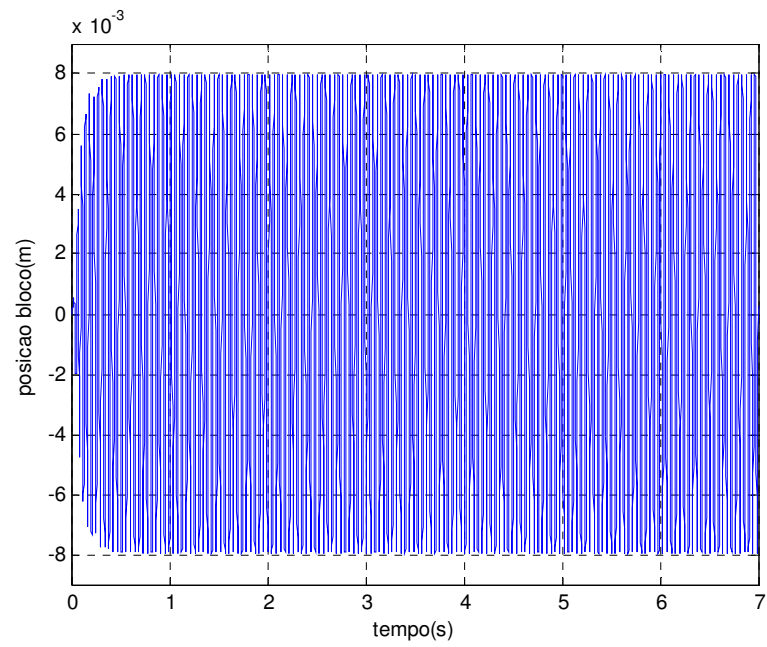


Gráfico 39: Posição do bloco em função do tempo

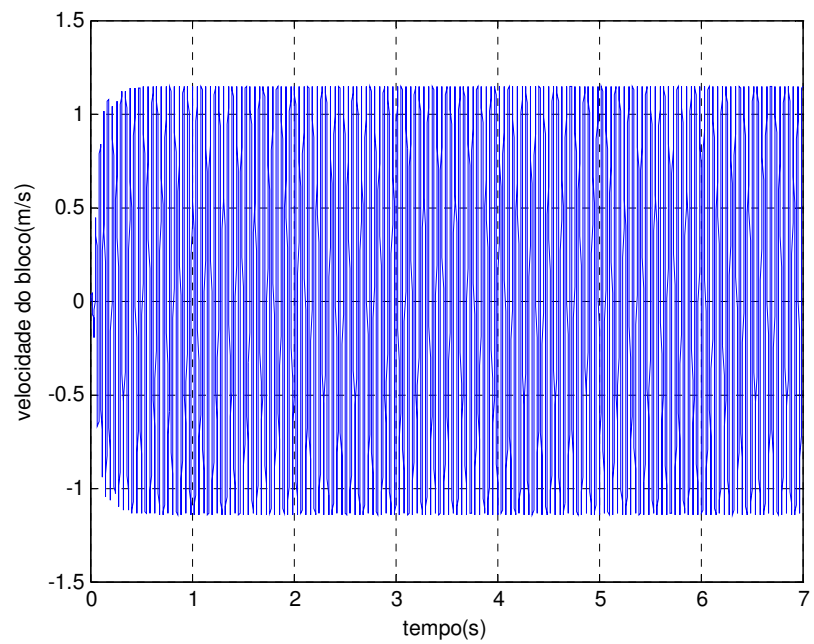


Gráfico 40: Velocidade da massa principal em função do tempo

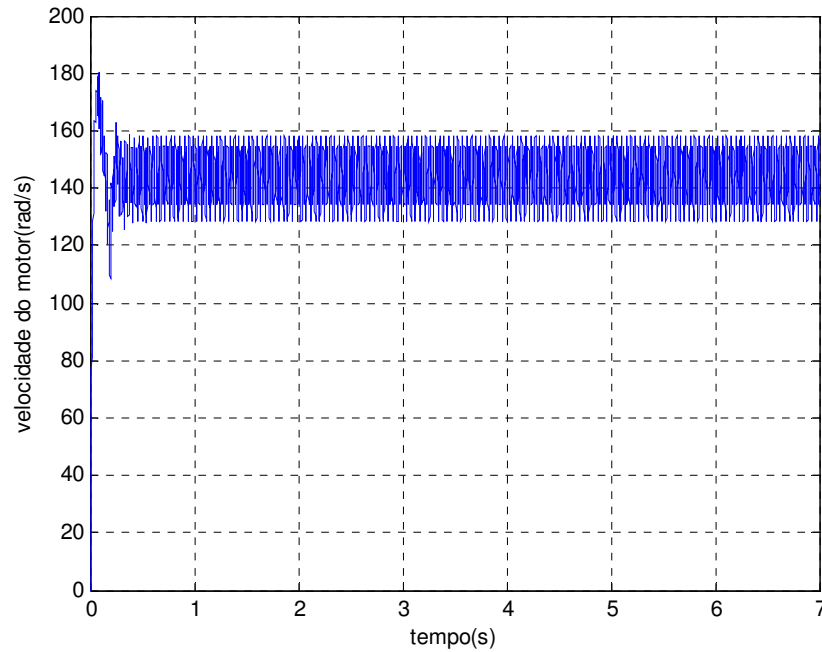


Gráfico 41: Velocidade do motor em função do tempo

5.2 Modelo controlado por pêndulo

A análise paramétrica do pêndulo foi dividida em três partes. Os parâmetros adicionados ao sistema através da inserção do pêndulo são a massa do pêndulo, seu comprimento e o coeficiente de amortecimento por ele proporcionado ao sistema. Como já observado, esse coeficiente de amortecimento é determinado por $c_{\text{pendulo}} = 2m_{\text{pendulo}}z(g/l)^{0.5}$. para determinação de um sistema ótimo de controle do pêndulo estudou-se a influência desses 3 novos parâmetros no sistema em regime permanente, buscando-se a diminuir as oscilações apresentadas pela estrutura principal. Os parâmetros utilizados podem ser listados: $m_1=2$; $m_2=0.2$; $k_1=49512$; $z_1=0.05$; $R=0.012$; $g=9.8$ e $b=0.0015$ e $M(0)$ na frequência de ressonância.

5.2.1 Influência do comprimento do pêndulo

Para esta análise, os parâmetros concernentes ao modelo sem controle são fixos como apresentados na seção 5.1. Inicialmente altera-se os valores de comprimento do pêndulo buscando aquela que proporciona menor oscilação da estrutura.

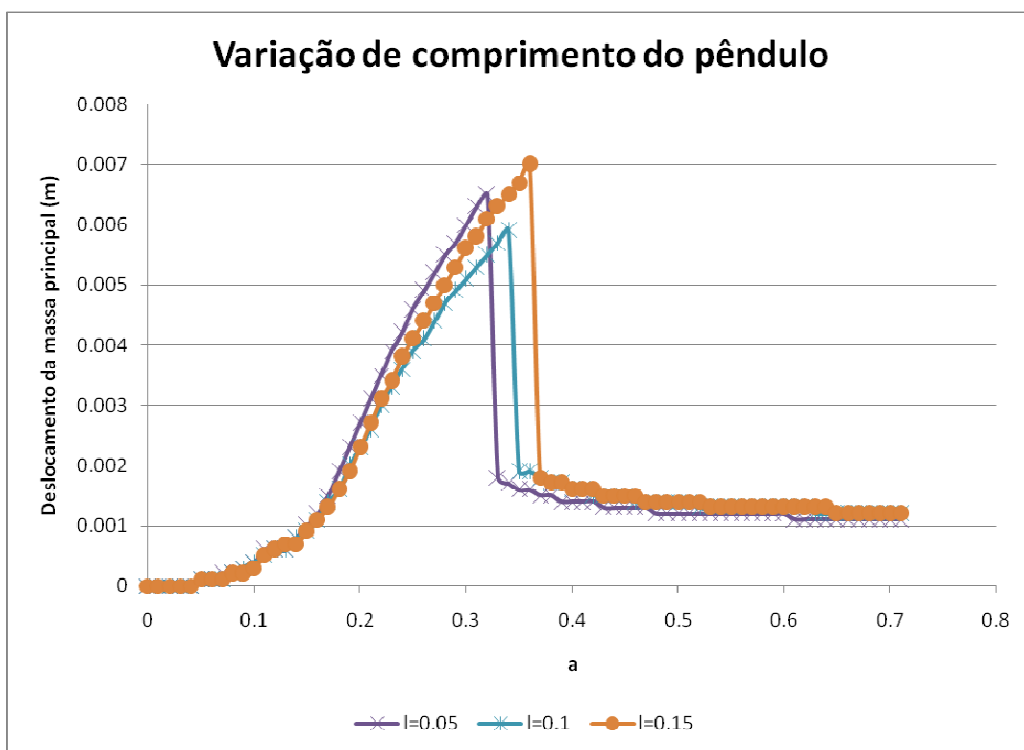


Gráfico 42: Estudo paramétrico do comprimento do pêndulo.

Entre os valores apresentados no gráfico 42, nota-se que o valor de comprimento do pêndulo igual a 0.1 mostrou-se mais eficiente para diminuir o deslocamento horizontal do sistema. Dessa forma, fixa-se no próximo estudo paramétrico este valor de l . É interessante notar que esse parâmetro não exerce influência proporcional ao deslocamento da estrutura e o valor de l médio é aquele que provoca menor amplitude de deslocamento.

5.2.2 Influência do amortecimento do pêndulo

Como o amortecimento do pêndulo é dada pela equação $c_{\text{pendulo}} = 2m_{\text{pendulo}}z(g/l)^{0.5}$, o estudo neste tópico baseia-se na variação do parâmetro z .

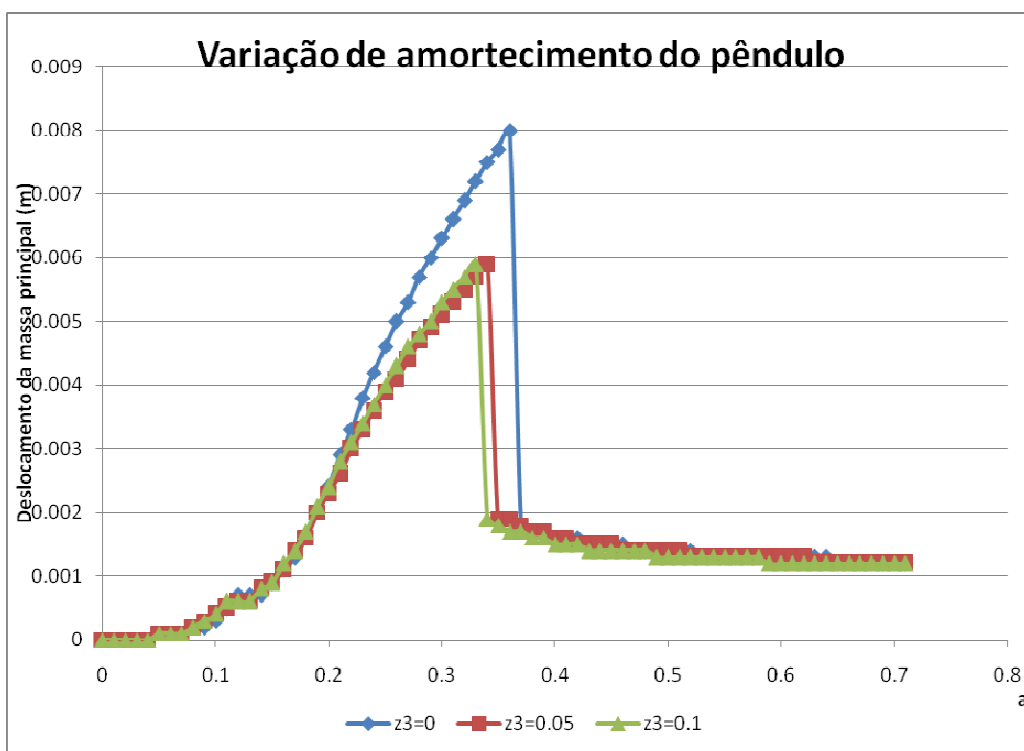


Gráfico 43: Estudo paramétrico do amortecimento do pêndulo.

A influência do amortecimento é menos aparente do que se pressupunha. O sistema com $z=0$ comporta-se muito semelhante ao sistema sem controle. Entretanto, não há diferenças notáveis entre o sistema testado com $z=0,05$ e $z=0,1$. Buscando maior consistência com aquilo que fora apresentado no modelo sem controle, no qual $z=0,05$, o próximo estudo paramétrico dimensiona a massa do pêndulo mantendo o valor de z anteriormente proposto.

5.2.3 Influência da massa do pêndulo

Tem-se, até então, $l=0,1\text{m}$ para o comprimento do pêndulo e $z=0,05\text{m}$, concernente ao coeficiente de amortecimento. Finaliza-se o estudo do pêndulo com o estudo paramétrico da influência da massa do pêndulo sobre o comportamento do sistema.

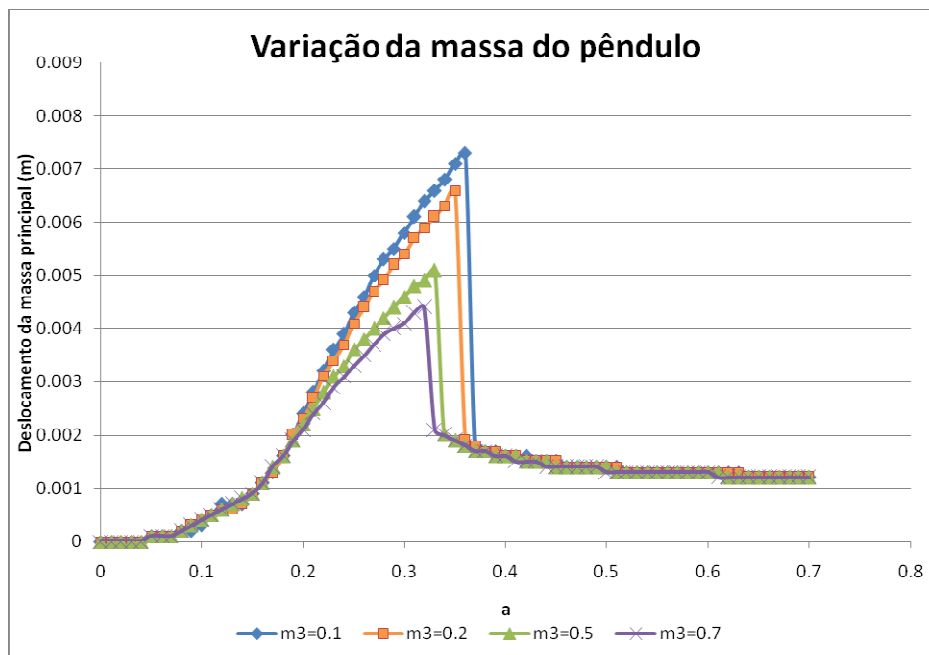


Gráfico 44: Estudo paramétrico da massa do pêndulo.

A influência da massa do pêndulo no comportamento do sistema é mais evidente do que a influência do amortecimento. É notável que quanto maior a massa de controle, menor é a amplitude de deslocamento da massa principal. Assim, define-se a massa do pêndulo como sendo igual a $0,7\text{kg}$, uma vez que não é pretendido dimensioná-la de forma a aproximá-la demais do valor apresentado pela massa estrutura (2 kg).

5.2.4 Resultado dos estudos paramétricos

Os estudos paramétricos proporcionaram os seguintes valores:

$l=0,1\text{ m}$

$$z=0,05$$

$$m_{\text{pendulo}}=0,7 \text{ kg}$$

Em comparação com o modelo sem controle temos os seguintes resultados:

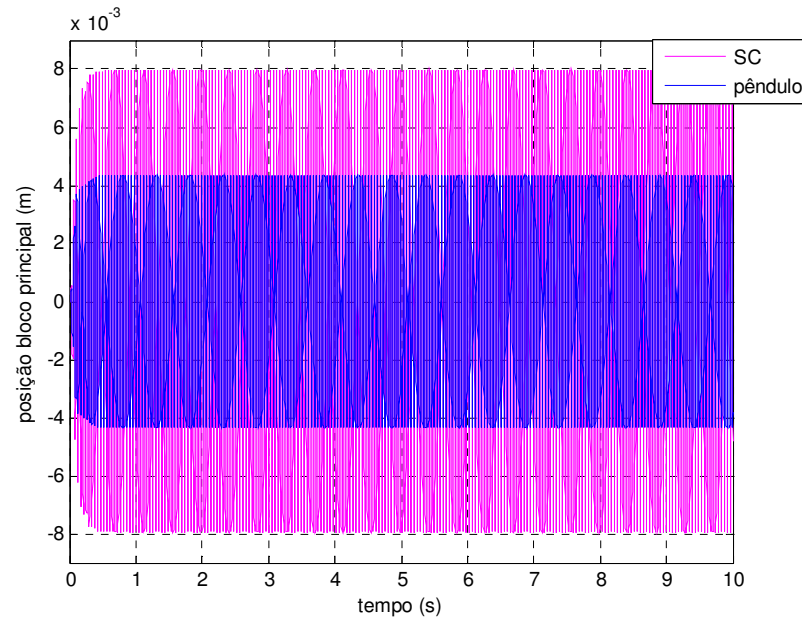


Gráfico 45: Comparação da posição do bloco com controle pêndulo.

O sistema controlado por pêndulo foi capaz de reduzir pela metade o movimento oscilatório do sistema sem controle.

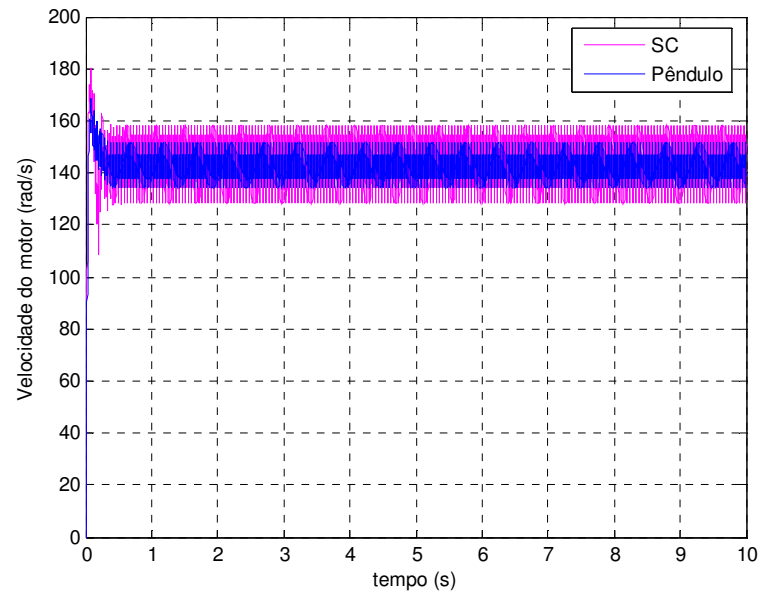


Gráfico 46: Comparação da velocidade de motor com controle pêndulo.

A velocidade média do motor é semelhante a frequência natural para ambos os casos. Entretanto, nota-se que a oscilação dessa velocidade é sensivelmente menor no caso do modelo controlado por pêndulo o que significa que menos energia é desperdiçada pela inconstância de operação do motor.

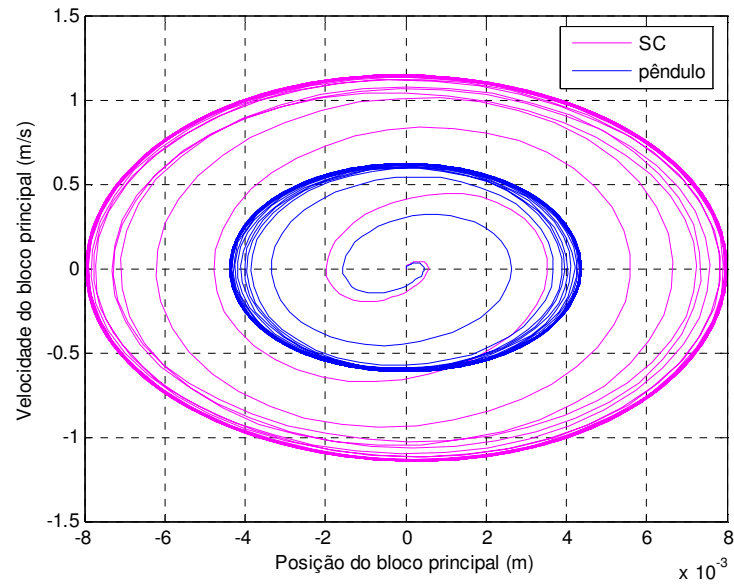


Gráfico 47: Comparação dos planos de fases com controle pêndulo.

Para esta visualização do plano de fases não foi retirada o período transitório até regime permanente. O sistema sem controle registra, a todo tempo, valores maiores de oscilação tanto da posição do bloco principal como de sua velocidade. Ainda que ambas as operações sejam assintoticamente estáveis, os movimentos registrados pelo pêndulo permanecem muito mais próximos do ponto inicial.

Finalmente, o gráfico de energia consumida:

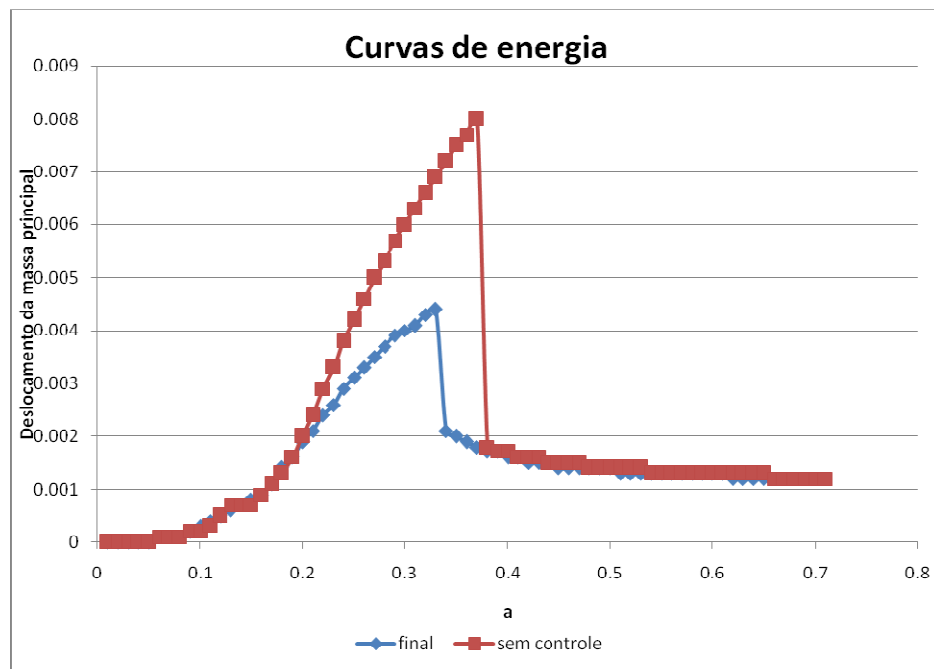


Gráfico 48: Comparação da curva de energia com controle pêndulo

Não foi registrado o aparecimento de uma segunda ressonância, como era esperado, já que o pêndulo adiciona um grau de liberdade ao estudo. Isso se deve ao fato de que o pêndulo não entra em ressonância para os valores de frequências registrados pelo sistema. É evidente, entretanto, que o sistema de controle proporcionado pelo pêndulo é eficaz e reduz em 45% a amplitude do deslocamento da estrutura principal.

5.3 Modelo com TMD

Na análise paramétrica do sistema controlado por TMD, utilizando os mesmos valores adotados para o sistema sem controle ($m_1=2$; $m_2=0.2$; $k_1=49512$; $z_1=0.05$; $R=0.012$; $g=9.8$ e $b=0.0015$), adotamos inicialmente $z_3=0.05$.

5.3.1 Influência do valor da massa secundária

Fixados os valores explicitados anteriormente, foi efetuada a variação paramétrica da massa de controle m_3 para cada valor de “a”.

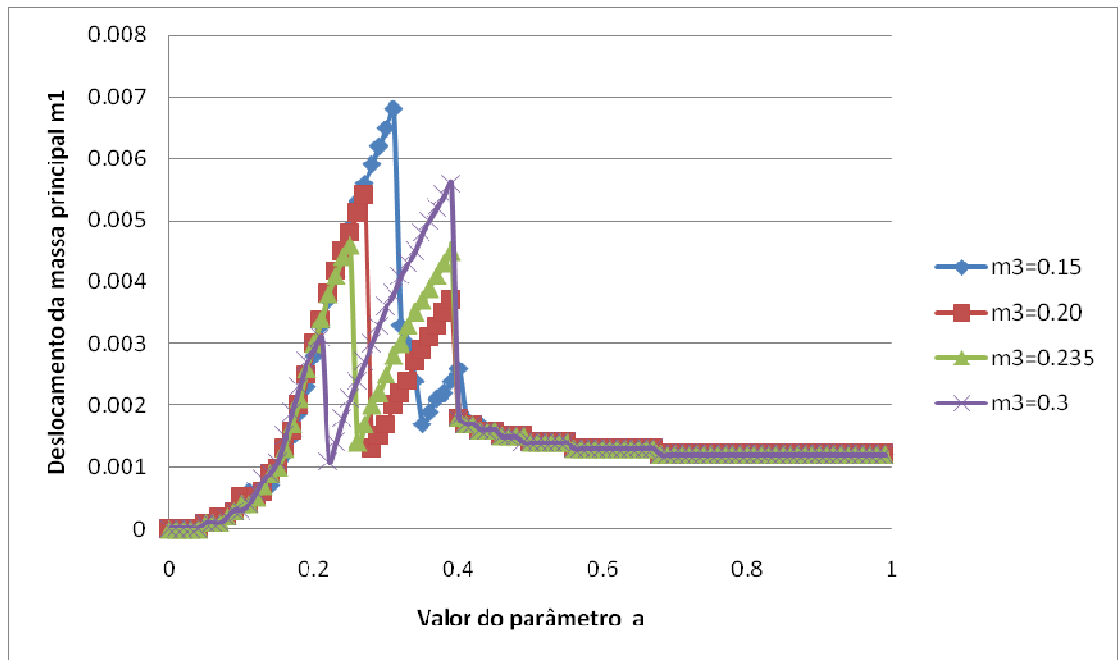


Gráfico 49: Estudo paramétrico da massa de controle.

Com a variação do parâmetro m_3 , a frequência de ressonância do TMD é modificada, seguindo a relação $\omega_{TMD} = \omega_{nTMD} \sqrt{1 - z_3^2}$, com $\omega_{nTMD} = \sqrt{\frac{k_3}{m_3}}$.

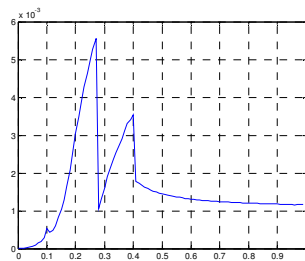
m_3	ω_{nTMD}	ω_{TMD}
0.15	181.68	181.45
0.2	157.34	157.14
0.235	145.15	144.97
0.3	128.47	128.31

Lembrando que a frequência de ressonância da massa principal é 157.34, pelo gráfico 49 pode-se perceber que para $m_3=0.235$, com frequência de 144.97, o deslocamento da massa principal para as duas frequências de ressonância são próximas a 0.0047 metros.

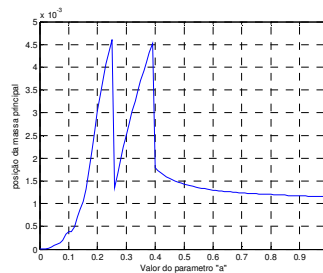
Verifica-se também que ao redor desse valor, quando aumentamos ou diminuimos a massa de controle, deslocamos a curva de energia, podendo assim, controlar o comportamento do sistema.

5.3.2 Influência da rigidez da massa secundária

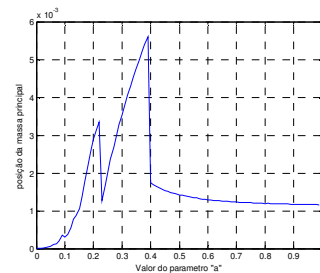
Variando a rigidez da massa secundária k_0 , assim como no caso de alterações das massas vistas em 5.3.1, modificamos as frequências de ressonância do sistema e deslocamos a curva de energia.



$$\frac{k_0}{k_n} = 0.9$$



$$\frac{k_0}{k_n} = 1$$



$$\frac{k_0}{k_n} = 1.1$$

Gráfico 50: Variação da rigidez da massa secundária

5.3.3 Influência do amortecimento da massa secundária

Com o aumento do amortecimento da massa secundária reduzimos as oscilações da massa principal. Teoricamente quanto maior o amortecimento melhor, no entanto, vale lembrar que os valores usuais de amortecimento para esse tipo de estrutura é de 0.05.

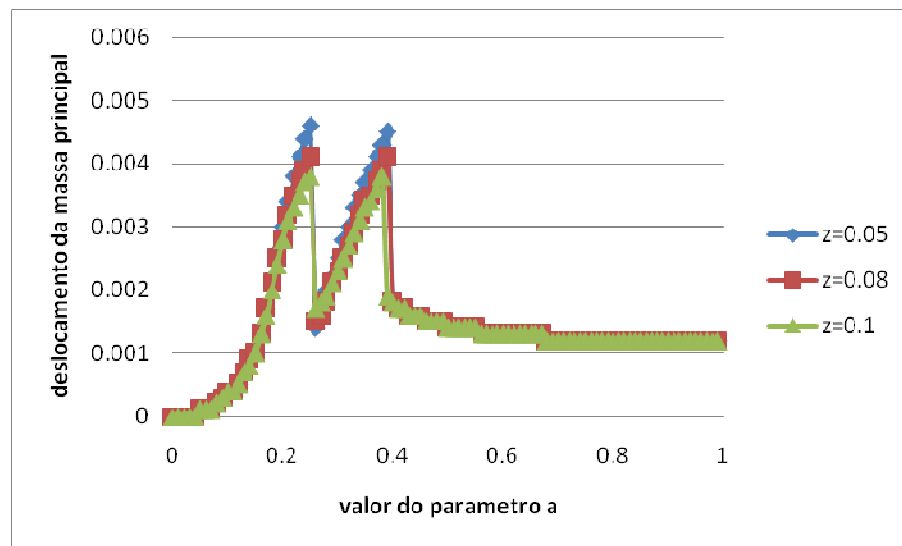


Gráfico 51: Curva de energia em relação a diferentes valores de amortecimento

5.3.4 Resultado dos estudos paramétricos

Com os estudos paramétricos encontramos os parâmetros ótimos para a redução da oscilação da massa principal. Os parâmetros finais utilizados são:

$$m_3=0.235$$

$$k_3=4951.2$$

$$z=0.05$$

Com o sistema definido, serão apresentados os gráficos do novo sistema controlado.

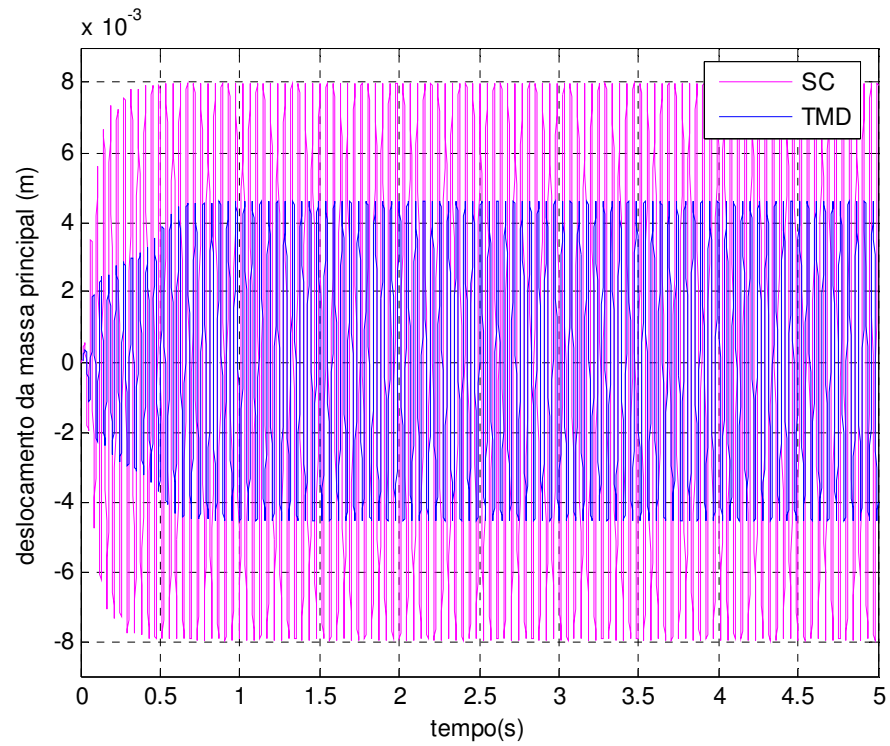


Gráfico 52: Comparação do deslocamento da massa principal em função do tempo

O deslocamento da massa principal reduziu significativamente com o TMD, se mostrando quase duas vezes menor em relação ao sistema sem controle.

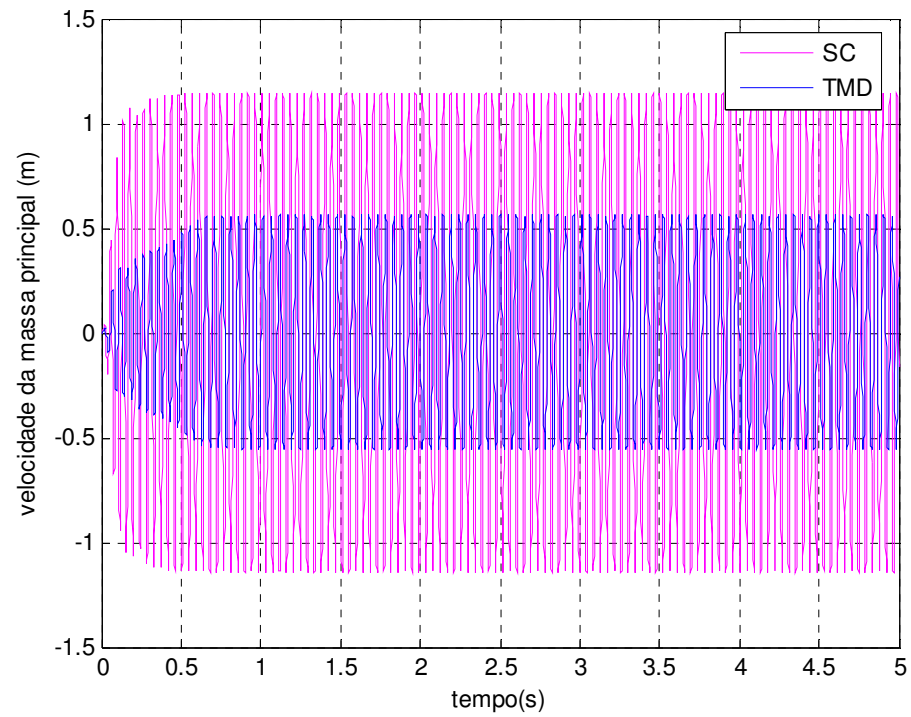


Gráfico 53: Comparação da velocidade da massa principal em função do tempo

Assim como o deslocamento, a velocidade do bloco se reduziu significativamente, cerca de 50% quando comparado ao sistema sem controle.

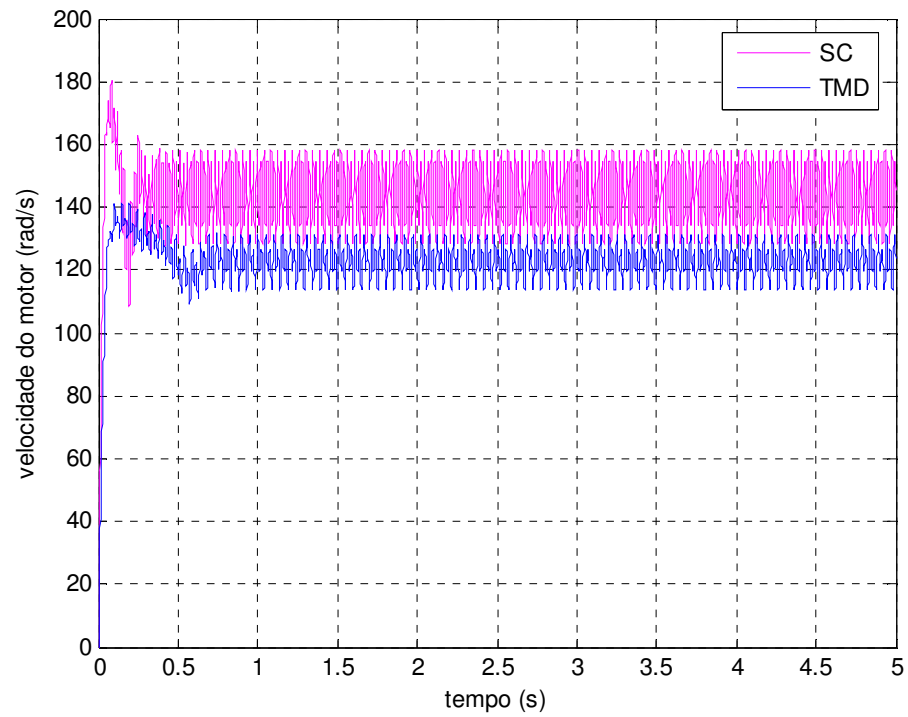


Gráfico 54: Comparação da velocidade do motor em função do tempo

Verifica-se que com o TMD, o motor consegue atingir velocidades maiores para uma mesma energia fornecida ao motor, ou seja, para atingir uma mesma velocidade, o sistema controlado por TMD necessita de menos energia.

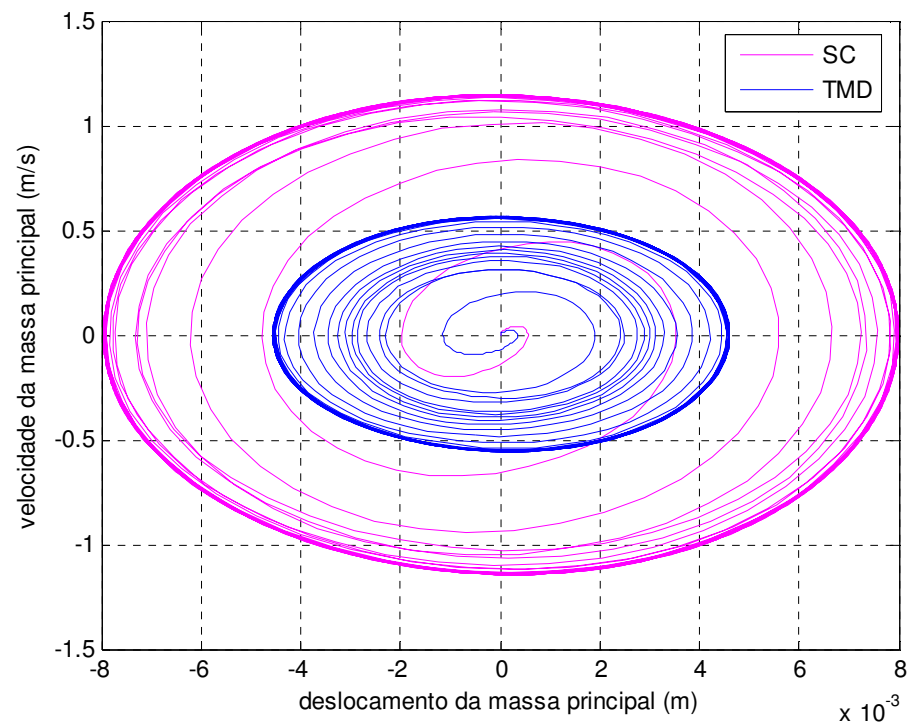


Gráfico 55: Comparação entre os planos de fases

Assim como no sistema sem controle, o sistema controlado se mostra estável, mas com menores deslocamentos e velocidades quando comparado ao sistema sem controle.

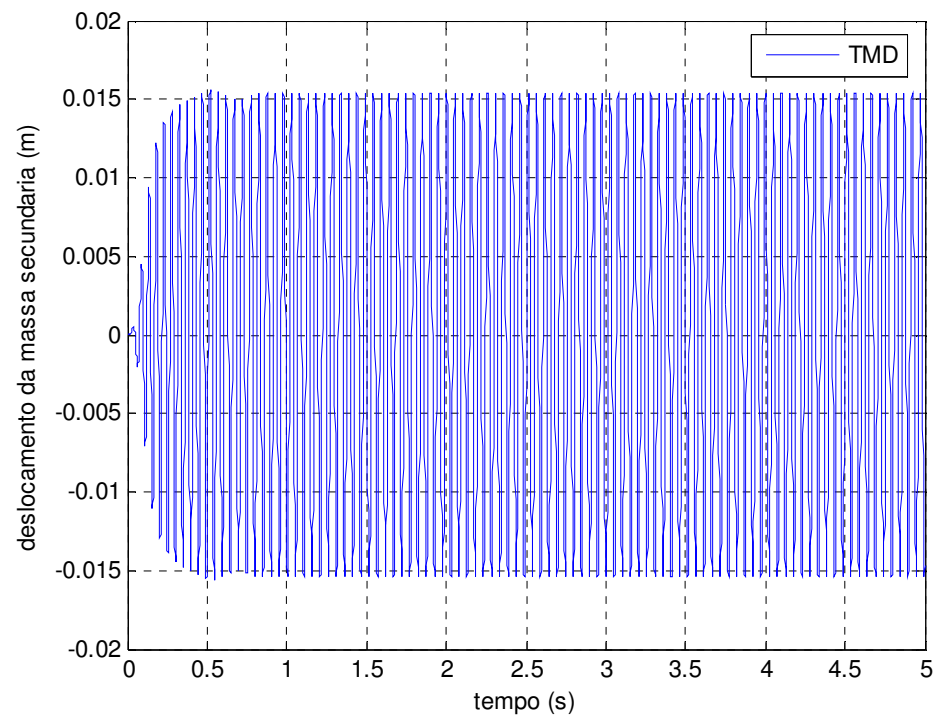


Gráfico 56: Deslocamento da massa secundária em função do tempo

A massa de controle se desloca cerca de quatro vezes mais do que a massa principal.

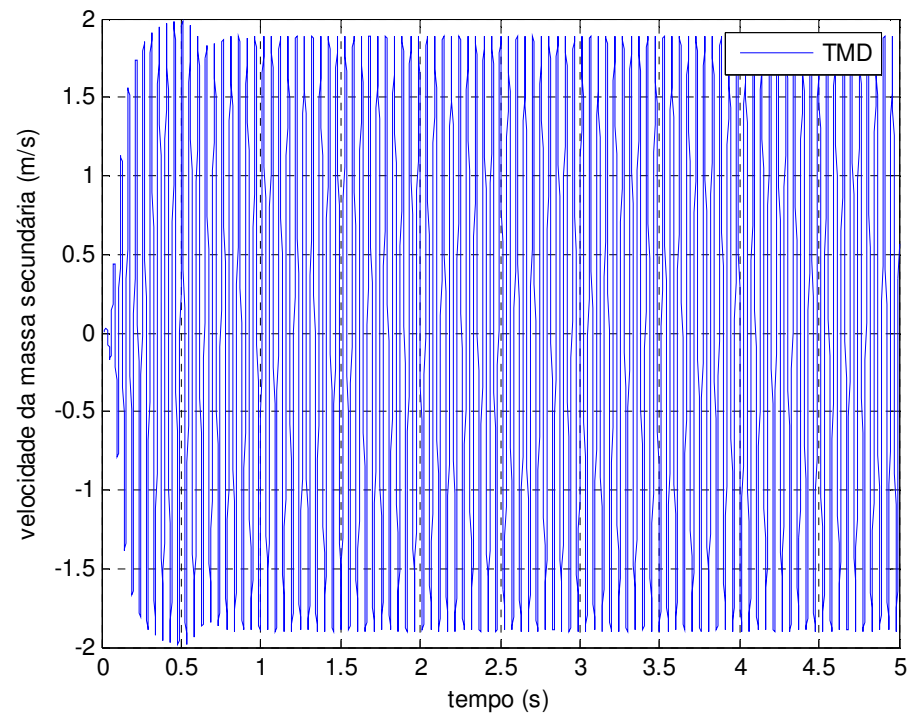


Gráfico 57: Velocidade da massa secundária em função do tempo

Assim como o deslocamento, a velocidade da massa secundária é superior a velocidade do bloco principal na mesma razão de quatro.

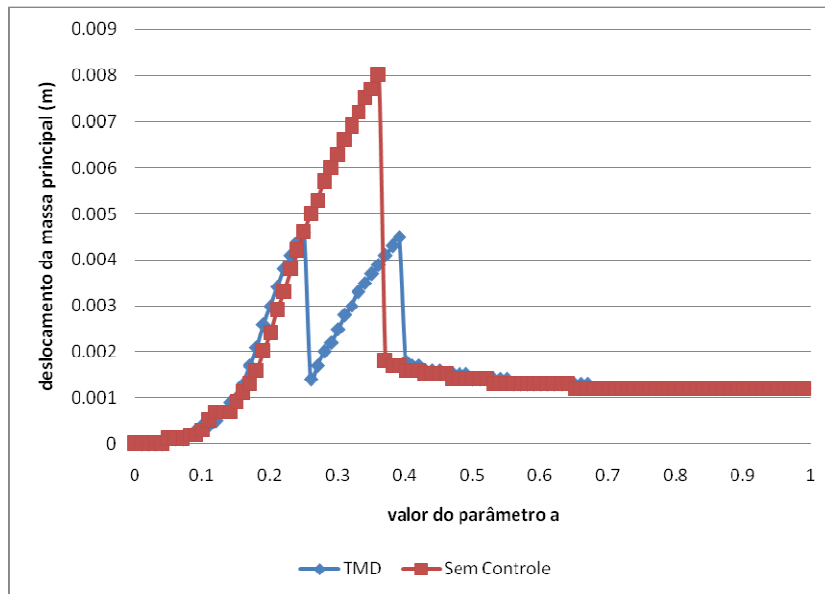


Gráfico 58: Comparação da curva de energia para os diferentes sistemas

Na curva de energia podemos observar o aparecimento de uma segunda frequência de ressonância, que surgiu devido a adição da massa secundária.

O deslocamento da massa principal, com o sistema controlado por TMD reduziu as oscilações da massa principal em pouco mais de 50%, demonstrando assim a sua eficácia quando planejado adequadamente.

5.4 Comentários sobre os estudos paramétricos

Ambos os modelos se apresentaram eficientes como absorvedor de vibrações, todos os resultados do sistema controlados mostraram-se superiores ao sistema sem controle, principalmente após o seu estudo paramétrico.

Por se tratar de um sistema não linear, os parâmetros de sintonização da massa principal são diferentes da teoria clássica, no entanto, o equacionamento da teoria clássica nos fornece excelentes valores iniciais para o estudo do problema. Essa constatação também pode estar relacionada ao fato de o modelo pêndulo não ter apresentado dois picos de ressonância.

6. CONCLUSÃO

Neste trabalho dois sistemas dinâmicos não ideais foram estudados constituídos por uma massa principal, excitada por um motor não ideal de potência limitada, e dois sistemas de controle distintos, o primeiro com o auxílio de um pêndulo, e o segundo com uma massa de controle sintonizada (*tuned mass damper*). Assim, os sistemas possuem três graus de liberdade, e para seu estudo, foram utilizadas simulações numéricas sem a linearização dos modelos. O uso da linearização só esteve presente na análise de estabilidade, nos quais foram feitos estudos do determinante da matriz Jacobiana dos sistemas.

Como o motor tem potência limitada, as equações de movimento e os pontos de equilíbrio dependem do torque $M(x_4)$ do motor. Neste estudo considera-se o modelo $M(x_4)=a-bx_4$, e toma-se a como parâmetro de controle.

Através dos estudos paramétricos, verifica-se que os métodos de controle apresentados são eficientes em reduzir praticamente pela metade o movimento oscilatório apresentado pela estrutura. Isso implica em uma sensível diminuição na energia fornecida ao motor, visando a fazê-lo operar com maiores velocidades e diminuindo o risco de ele atingir regime permanente abaixo da velocidade esperada - estagnação. Além disso, dada essa diminuição do movimento oscilatório, esses métodos de controle também podem ser utilizados em controle de abalos em estruturas.

7. Estudos posteriores

Os estudos desenvolvidos nesse trabalho são preliminares, e objetivaram uma análise geral dos sistemas dinâmicos considerados. Os resultados obtidos dão indicações sobre os próximos passos a serem seguidos, com o intuito de aprofundar mais os estudos.

O que deseja-se propor é um estudo de caos, segundo mapas e secções de poincare, assim como a utilização de expoentes de lyapunov e diagramas de bifurcação, proporcionando assim um melhor entendimento nos sistemas estudados. Mais do que isso, novos estudos têm surgido de forma a dimensionar métodos de controle visando a limitar a região de operação no vale compreendido entre os dois picos de ressonância do gráfico de energia consumida. Finalmente, seria interessante estudar a reação dos métodos de controle a forças externas variáveis, o que seria diretamente aplicado no caso de estudo de vibrações em estruturas.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] CLOUGH, R.W.; PENZIEN, J., *Dynamics of structures*. McGraw Hill, 1975.
- [2] FEITOSA, L. C. S., *Controle por impacto de vibrações estruturais excitadas por carregamentos não ideais*. Dissertação de mestrado. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006
- [3] FERREIRA, M. C., *Análise de um sistema dinâmico não ideal com excitação vertical e horizontal*. Dissertação de mestrado. Instituto de Biociências, Letras e Ciência Exatas – UNESP, São José do Rio Preto, 2007
- [4] GUILHERME, K. L., *Vibrações não lineares e não ideais de um sistema de dois graus de liberdade*. Dissertação de mestrado. Departamento de Projeto Mecânico - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2004
- [5] HASELMAN, D., LITTLEFIELD, B., *MATLAB 6 Curso completo*. São Paulo: Prentice Hall, 2003
- [6] JÚNIOR, N. C., *O uso da análise de Fourier, de Wavelets e dos expoentes de Lyapunov no estudo de um sistema dinâmico não-ideal com atrito seco e excitação externa*. Dissertação de mestrado. Instituto de geociências e ciências exatas – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, São Paulo, 2007
- [7] KONONENKO, V. O., *Vibrating system of limited power supply*. London Life Books Ltd, 1969.
- [8] KUROIWA, T., *Controle passivo de vibrações de bases de motores não ideais*. Dissertação de mestrado. Departamento de engenharia de estruturas – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003
- [9] INMAN, D. J., *Engineering Vibration*, 2ª Edição, New Jersey: 2001
- [10] OGATA, K., *Modern control engineering*. Prentice-Hall, Third Edition, 1987
- [11] OGATA, K., *System dynamics*. Prentice-Hall, Third Edition, 1998
- [12] PERUZZI, N. J., BALTHAZAR, J. M., PONTES, B. R., BRASIL, R. M. L. R. F., *Nonlinear dynamics and control of an ideal/nonideal load transportation system with periodic coefficients*. *Journal of computational and nonlinear dynamics*, Vol. 2, January 2007, pp 32 – 39

- [13] RAO, S. S., *Mechanical vibrations*. Addison-Wesley Publishing Company, Third Edition
- [14] THOMPSON, J. M. T.; STEWART, H. B., *Nonlinear dynamics and chaos*. Grã-Bretanha: John Wiley & Sons Ltd., 1986
- [15] THOMSON, W. T., *Teoria da vibração com aplicações*. Editora Interciência
- [16] VIERCK, R. K., *Vibration analysis*. Harper & Row, Second Edition